UVOD U TEORIJU ODLUČIVANJA

TEORIJA IGARA – NEKOOPERATIVNE BIMATRIČNE IGRE

Igre sa dva igrača i promenljivom (ne-nultom) sumom

Igre sa promenljivom sumom opisuju slučajeve kada su interesi igrača delimično konfliktni, a delimično saglasni.

Mogući rezultati nisu jednaki konstanti, već variraju, tako da su za sve igrače neka rešenja povoljnija od nekih drugih. Možemo ih posmatrati kao „deobu kolača promenljive veličine“.

Označimo sa a_{ij} dobit igrača A ako on odigra strategiju A_i, a igrač B odigra strategiju B_j. Takođe, označimo sa b_{ij} dobit igrača B ako on odigra strategiju B_j, a igrač A odigra strategiju A_i.

Kod strategija sa promenljivom sumom ne važi da je dobit igrača A jednaka gubitku igrača B, tj. $b_{ij} \neq -a_{ij}$. Zbog toga za svaki par strategija A_i i B_j suma a_{ij} i b_{ij} neće uvek biti jednaka nuli.

Igre sa dva igrača i promenljivom (ne-nultom) sumom

Kod matričnih igara sa nenultom sumom matrica plaćanja ima sledeći oblik:

Strategije igrača *A* (A_i)	**Strategije igrača *B* (B_j)**					
	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n
A_1	a_{11},b_{11}	a_{12},b_{12}	…	a_{1j},b_{1j}	…	a_{1n},b_{1n}
A_2	a_{21},b_{21}	a_{22},b_{22}	…	a_{2j},b_{2j}	…	a_{2n},b_{2n}
⋮	…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1},b_{i1}	a_{i2},b_{i2}	…	a_{ij},b_{ij}	…	a_{in},b_{in}
⋮	…	…	…	…	…	…
A_m	a_{m1},b_{m1}	a_{m2},b_{m2}	…	a_{mj},b_{mj}	…	a_{mn},b_{mn}

Matricu plaćanja je moguće rastaviti na matricu dobiti igrača *A* i matricu dobiti igrača *B*.

Igre sa dva igrača i promenljivom (ne-nultom) sumom

MATRICA DOBITI IGRAČA A

Strategije igrača *A* (A_i)	**Strategije igrača *B* (B_j)**					
	B_1	B_2	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2j}	$\dots$	a_{2n}
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_i	a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	a_{in}
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mj}	$\dots$	a_{mn}

MATRICA DOBITI IGRAČA B

Strategije igrača *A* (A_i)	**Strategije igrača *B* (B_j)**					
	B_1	B_2	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_n
A_1	b_{11}	b_{12}	$\dots$	b_{1j}	$\dots$	b_{1n}
A_2	b_{21}	b_{22}	$\dots$	b_{2j}	$\dots$	b_{2n}
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_i	b_{i1}	b_{i2}	$\dots$	b_{ij}	$\dots$	b_{in}
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	b_{m1}	b_{m2}	$\dots$	b_{mj}	$\dots$	b_{mn}

Igre sa dva igrača i promenljivom (ne-nultom) sumom

U zavisnosti od toga da li igrači imaju mogućnost da se međusobno dogovaraju ili nemaju, unutar ove grupe igara razlikujemo:

- kooperativne i
- nekooperativne igre.

Kod kooperativnih igara igrači imaju mogućnost da razmenjuju informacije i da se dogovaraju. Na taj način mogu da pronađu rešenje koje je pogodno za oba igrača.

Kod nekooperativnih igara igrači nemaju mogućnost da komuniciraju i oni ne znaju sa sigurnošću kakvu će strategiju odigrati drugi igrač. Zbog toga oba igrača moraju da računaju da će onaj drugi igrati racionalno i najbolje moguće za sebe.

Primeri su: pregovori o platama zaposlenih između menadžmenta i sindikata, kupoprodajni ugovori, itd.

Igre sa dva igrača i promenljivom (ne-nultom) sumom - nekooperativne igre

Dilema zatvorenika

Dva čoveka su uhapšena zbog sumnje da su učestvovali u krađi. Tužilaštvo još nema jasne dokaze da su tu krađu oni učinili. Zbog toga je ponuđena nagodba svakom od njih ponuđena nagodba da sarađuju sa tužilaštvom, i da priznaju krađu. Ako bi oba optužena priznala tada bi dobili po 7 godina robije, a ako bi jedan od njih priznao a drugi ne, onda bi onaj koji je priznao bio oslobođen a drugi bi dobio 20 godina robije. Međutim, ukoliko oba zatvorenika odbiju da sarađuju, i da priznaju krađu, onda bi obojica dobili po dve godine robije.

Strategije igrača *A* (A_i)	**Strategije igrača *B* (B_j)**	
	Priznati	*Ne priznati*
Priznati	-7,-7	0,-20
Ne priznati	-20,0	-2,-2

Igre sa dva igrača i promenljivom (ne-nultom) sumom - nekooperativne igre

Određivanje strategija za koje se postiže nivo bezbednosti igrača A:

$$v_A = \max_{p} \min_{j} \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot a_{ij}$$

Strategija $P = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$ se zove maximin strategija.

Igre sa dva igrača i promenljivom (ne-nultom) sumom - nekooperativne igre

Određivanje strategija za koje se postiže nivo bezbednosti igrača *B*:

$$v_B = \max_{\mathrm{q}} \min_{i} \sum_{i=1}^{n} q_j \cdot b_{ij}$$

Strategija $Q = (q_1, q_2, \ \cdots, q_n)$ se zove maximin strategija.

Igre sa dva igrača i promenljivom (ne-nultom) sumom - nekooperativne igre

Primer: odrediti nivoe bezbednosti igrača A i B.

Strategije igrača *A* (A_i)	**Strategije igrača *B* (B_j)**	
	B1	*B2*
A1	*4,4*	*1,3*
A2	*3,2*	*6,6*

Igre sa dva igrača i promenljivom (ne-nultom) sumom - nekooperativne igre

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$4 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2 = p_1 + 6 \cdot p_2$$

$$4 \cdot p_1 + 3 \cdot (1 - p_1) = p_1 + 6 \cdot (1 - p_1)$$

$$4 \cdot p_1 + 3 - 3 \cdot p_1 = p_1 + 6 - 6 \cdot p_1$$

$$p_1 + 3 = -5 \cdot p_1 + 6$$

$$p_1 + 5 \cdot p_1 = 6 - 3$$

$$6 \cdot p_1 = 3$$

$$p_1 = \frac{1}{2}; \quad p_2 = 1 - p_1 = \frac{1}{2}$$

$$v_A = 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 3{,}5$$

Igre sa dva igrača i promenljivom (ne-nultom) sumom - nekooperativne igre

$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$4 \cdot q_1 + 3 \cdot q_2 = 2 \cdot q_1 + 6 \cdot q_2$

$4 \cdot q_1 + 3 \cdot (1 - q_1) = 2 \cdot q_1 + 6 \cdot (1 - q_1)$

$4 \cdot q_1 - 3 \cdot q_1 - 2 \cdot q_1 + 6 \cdot q_1 = 6 - 3$

$5 \cdot q_1 = 3$

$q_1 = \frac{3}{5}, q_2 = 1 - q_1 = \frac{2}{5}$

$\nu_B = 4 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{5} = 3{,}6$

Igre sa dva igrača i promenljivom (ne-nultom) sumom - nekooperativne igre

Strategije igrača *A* (A_i)	Strategije igrača *B* (B_j)	
	B1	*B2*
A1	4,4	1,3
A2	3,2	6,6

Tačke strateškog ekvilibrijuma: (4, 4), (6,6)

Igre sa dva igrača i promenljivom (ne-nultom) sumom - nekooperativne igre

$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

$4 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 = 3 \cdot p_1 + 6 \cdot p_2$

$p_1 = \frac{4}{5}, p_2 = 1 - q_1 = \frac{1}{5}$

$v_B = 4 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{18}{5} = 3{,}6$

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

$4 \cdot q_1 + 1 \cdot q_2 = 3 \cdot q_1 + 6 \cdot q_2$

$q_1 = \frac{5}{6}, q_2 = 1 - q_1 = \frac{1}{6}$

$v_A = 4 \cdot q_1 + 1 \cdot q_2 = 3{,}5$

Strateški ekvilibrijum se postiže i za verovatnoće P=(4/5, 1/5) i Q=(5/6, 1/6).

Igre sa dva igrača i promenljivom (ne-nultom) sumom - nekooperativne igre

Strateški ekvilibrijumi se potižu u sledećim slučajevima:

1. $p_1 = 1, p_2 = 0, v_A = 4; q_1 = 1, q_2 = 0, v_B = 4$

2. $p_1 = 0, p_2 = 1, v_A = 6; q_1 = 0, q_2 = 1, v_B = 6$

3. $p_1 = 4/5\,, p_2 = 1/5\,, v_A = 3{,}5; q_1 = 5/6\,, q_2 = 1/6\,, v_B = 3{,}6$