Deo II

Otpornost materijala

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

GLAVA 4

MOMENTI RAVNIH POVRŠI

4.1 Geometrijske karakteristike ravnih površi

Pri izvođenju nekih obrazaca iz otpornosti materijala često se javljaju izrazi koji zavise samo od oblika poprečnog preseka posmatranog elementa (geometrijska karakteristika), a ne i od spoljašnjeg opterećenja ili od veze sa susednim elementima. Pošto su ove karakteristike iste za sve preseke istog oblika, korisno ih je izračunati za pojedine oblike i kasnije ih koristiti kao gotove obrasce. Te veličine su: **težište, statički moment površi, momenti inercije**, itd.

4.1.1 Težište. Statički moment površi (moment I reda)

Težište je tačka[1] površi S čije su koordinate (x_C, y_C), u odnosu na Dekartov koordinatni sistem, određene sa:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\int\limits_A x \,\mathrm{d}A}{\int\limits_A \mathrm{d}A}, \\ y_C &= \frac{\int\limits_A y \,\mathrm{d}A}{\int\limits_A \mathrm{d}A}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

[1]Često se ova tačka naziva i središte ili centar.

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Neka svojstva težišta

Navešćemo neka svojstva ove veličine, koja ćemo kasnije koristiti.

- Težište površi koja ima osu simetrije nalazi se na toj osi.
- Težište površi koja ima dve ose simetrije nalazi se u preseku tih osa.
- Ako se neka površ A može podeliti na n konačnih delova, površina A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, čija težišta x_i, y_i znamo, tada se težište površi A računa po obrascima

$$x_C = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} x_i A_i, \quad y_C = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} y_i A_i, \quad \text{gde je } A = \sum_{i=1}^{n} A_i. \tag{4.2}$$

Statički moment površi, za x ili y osu, definišemo sa:

$$S_x = \int_A y \, \mathrm{d}A, \quad S_y = \int_A x \, \mathrm{d}A. \tag{4.3}$$

Koordinate težišta i statički momenti površi, prema (4.2) i (4.3), povezani su relacijama:

$$S_x = y_c \, A, \quad S_y = x_c \, A. \tag{4.4}$$

Na osnovu izraza (4.4) zaključujemo da su statički momenti površi jednaki nuli za ose koje prolaze kroz težište poprečnog preseka:

$$S_x = 0, \quad S_y = 0, \tag{4.5}$$

jer je za te ose $x_c = y_c = 0$.

Osa koja prolazi kroz težište zove se **težišna** ili **centralna** osa.

Statički moment površi, koja se sastoji iz konačnog broja delova ($A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$), jednak je zbiru statičkih momenata tih delova:

$$\begin{aligned} S_x &= y_1 A_1 + \cdots + y_n A_n = \sum_{i=1}^{n} y_i A_i, \\ S_y &= x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Koordinate težišta delova (x_i, y_i) treba uzeti sa znakom (+) ili (−), u zavisnosti od položaja tih tačaka u posmatranom koordinatnom sistemu.

Jedinica statičkog momenta površi je $[m^3]$.

4.2 Momenti inercije ravnih površi (momenti II reda)

Razlikujemo sledeće momente inercije: aksijalni (ekvatorijalni), polarni i centrifugalni (devijacioni).

Definišemo ih na sledeći način:

- **aksijalni moment inercije** (za ose x i y):

$$I_x = \int_A y^2 \,\mathrm{d}A, \quad I_y = \int_A x^2 \,\mathrm{d}A, \tag{4.7}$$

gde su x odnosno y rastojanja elementarne površi dA od odgovarajuće ose.

- **polarni moment inercije** (za tačku O):

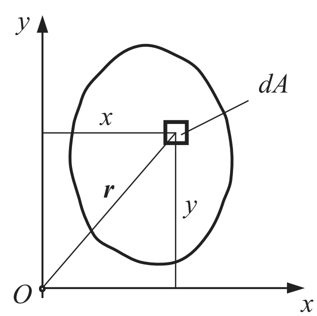
$$I_O = \int_A r^2 \,\mathrm{d}A, \tag{4.8}$$

gde je r - rastojanje elementarne površi dA (njenog težišta) od neke stalne tačke (pola).

- **centrifugalni moment inercije** (za par osa x, y):

$$I_{xy} = \int_A xy \,\mathrm{d}A, \tag{4.9}$$

gde su x, y koordinate težišta elementarne površi dA.



Slika 4.1:

4.2.1 Neka svojstva momenata inercije

Navešćemo neka svojstva momenata inercije, koja ćemo kasnije koristiti.

- Vrednost momenta inercije zavisi od položaja koordinatnog sistema i sa promenom položaja koordinatnog sistema menja se (u opštem slučaju) i njegova vrednost.

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

- Vrednosti aksijalnih momenata inercije ne menjaju se ako se neki delovi te površi paralelno pomere u odnosu na osu za koju se računaju. Ovo sledi iz definicija (4.7), jer se na ovaj način ne menja rastojanje od odgovarajuće ose.

- Iz definicija (4.7), (4.8) i (4.9) sledi da su aksijalni i polarni momenti inercije uvek pozitivne veličine, dok centrifugalni može da bude pozitivan, negativan ili jednak nuli, tj.:

$$I_x > 0,\ I_y > 0,\ I_p > 0,\ I_{xy} \lesseqgtr 0.$$

- Polazeći od definicija (4.7) i (4.8) možemo da uspostavimo vezu između aksijalnih momenata inercije i polarnog momenta inercije, ako za pol izaberemo koordinatni početak (sl. 4.3):

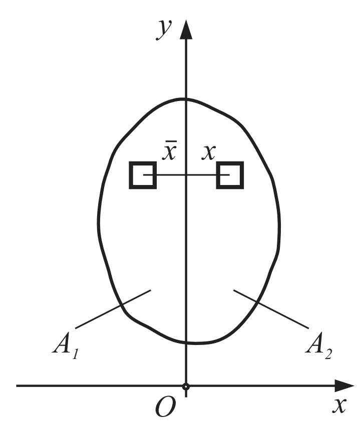
$$\begin{aligned} I_O &= \int_A r^2\,\mathrm{d}A = \int_A \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}A = \\ &= \int_A x^2\,\mathrm{d}A + \int_A y^2\,\mathrm{d}A = I_x + I_y. \end{aligned} \tag{4.10}$$

- Centrifugalni moment inercije jednak je nuli, ako je bar jedna osa, za koju se računa, osa simetrije posmatrane površi. Dokaz (sl. 4.2):

$$I_{xy} = \int_A xy\,\mathrm{d}A = \int_{A_1} \overline{x}y\,\mathrm{d}A_1 + \int_{A_2} xy\,\mathrm{d}A_2,$$

$$A_1 = A_2 \equiv \overline{A}, \quad \overline{x} = -x \quad \Rightarrow$$

$$I_{xy} = \int_{\overline{A}} (-x)y\,\mathrm{d}A + \int_{\overline{A}} xy\,\mathrm{d}A = 0.$$



Slika 4.2: Simetričan poprečni presek.

❑

- Moment inercije površi, sastavljene iz delova, jednak je zbiru momenata inercije pojednih delova.

Jedinica momenta inercije je $[m^4]$.

4.2.2 Promena momenta inercije pri transformaciji koordinatnog sistema

U praksi je često komplikovano računanje momenata inercije za glavne težišne ose (definisaćemo ih kasnije), pa se oni računaju za ose nekog prilagođenog (pogodnijeg) koordinatnog sistema. Da bismo zatim izračunali momente inercije za glavne, težišne ose, potrebno je da, ako znamo vezu između dva koordinatna sistema (prilagođen sistem koordinata i sistem glavnih težišnih osa), znamo i vezu između odgovarajućih momenata inercije.

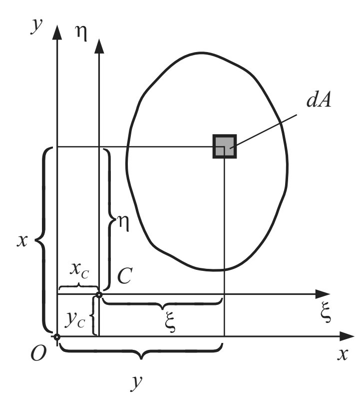
Kako iz jednog koordinatnog sistema u drugi možemo da "pređemo" sa jednom translacijom i jednom rotacijom (koordinatne transformacije), to je potrebno da vidimo kako se i momenti inercije menjaju pri ovim transformacijama.

 # Promena momenata inercije površi pri translaciji koordinatnog sistema. Štajnerova teorema

Veza, između koordinata dva paralelna koordinatna sistema, data je izrazima (sl. 4.3):

$$x = x_c + \xi, \qquad y = y_c + \eta. \tag{4.11}$$

Da bismo dobili vezu između odgovarajućih momenata inercije, pođimo od definicije ovih veličina i iskoristimo (4.11):



Slika 4.3: Paralelni koordinatni sistemi.

$$I_x = \int\limits_A y^2 \,\mathrm{d}A = \int\limits_A (y_c + \eta)^2 \,\mathrm{d}A = \int\limits_A \left(y_c^2 + 2y_c\eta + \eta^2\right) \mathrm{d}A =$$

$$= y_c^2 A + 2y_c \int\limits_A \eta \,\mathrm{d}A + \int\limits_A \eta^2 \,\mathrm{d}A = \underline{y_c^2 A + 2y_c S_\xi + I_\xi = I_x}.$$

$$I_y = \int\limits_A x^2 \,\mathrm{d}A = \int\limits_A (x_c + \xi)^2 \,\mathrm{d}A = \underline{x_c^2 A + 2x_c S_\eta + I_\eta = I_y}.$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

$$I_{xy} = \int_A xy\,\mathrm{d}A = \int_A (x_c+\xi)(y_c+\eta)\,\mathrm{d}A =$$
$$= \underline{x_c y_c A + x_c S_\xi + y_c S_\eta + I_{\xi\eta} = I_{xy}}.$$

U specijalnom slučaju kada su ose ξ,η težišne, $S_\xi = S_\eta = 0$, dobijamo:

$$\begin{aligned} I_x &= I_\xi + y_c^2 A \\ I_y &= I_\eta + x_c^2 A \\ I_{xy} &= I_{\xi\eta} + x_c y_c A. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Momente inercije za težišne ose (I_ξ, I_η, $I_{\xi\eta}$) zovemo **sopstveni momenti inercije**, a članove $x_c^2 A, x_c y_c A$ i $y_c^2 A$ **položajni momenti inercije**.

Iz (4.12) sledi

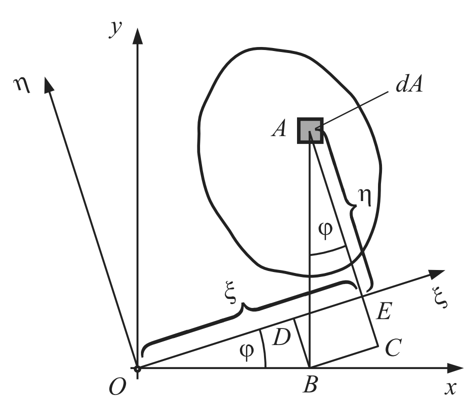
Teorema 1 (Štajnerova) [2] *Moment inercije površi u odnosu na neku osu jednak je zbiru sopstvenog momenta inercije i položajnog momenta inercije, za paralelnu osu.*

☞ Napomenimo da je od svih aksijalnih momenata inercije za paralelne ose najmanji onaj za težišne ose. Ovo tvrđenje sledi iz (4.12).

Promena momenata inercije površi pri rotaciji koordinatnog sistema oko njihovog početka

Potrebno je, prvo, uspostaviti vezu između koordinata proizvoljne tačke površi u odnosu na dva koordinatna sistema (vidi sl. 4.4). Da bismo to uradili, odredimo sledeće dužine:

$$\begin{aligned} &\overline{OB} = x, \quad \overline{AB} = y, \\ &\overline{OD} = \overline{OB}\cos\varphi = x\cos\varphi; \\ &\overline{DE} = \overline{BC} = \overline{AB}\sin\varphi = y\sin\varphi, \\ &\overline{AC} = \overline{AB}\cos\varphi = y\cos\varphi; \\ &\overline{CE} = \overline{BD} = \overline{OB}\sin\varphi = x\sin\varphi. \end{aligned}$$



Slika 4.4: Rotacija koordinatnog sistema.

[2] Steiner

Veze između koordinata za ova dva koordinatna sistema (koordinatne transformacije) su (vidi sl. 4.4):

$$\xi = \overline{OD} + \overline{DE} = x\cos\varphi + y\sin\varphi,$$
$$\eta = \overline{AC} - \overline{CE} = y\cos\varphi - x\sin\varphi.$$

Veza između momenata inercije za ova dva koordinatna sistema je:

$$I_\xi = \int\limits_A \eta^2\,\mathrm{d}A = \int\limits_A (y\cos\varphi - x\sin\varphi)^2\,\mathrm{d}A =$$
$$= \cos^2\varphi \int\limits_P y^2\,\mathrm{d}A - 2\sin\varphi\cos\varphi \int\limits_A xy\,\mathrm{d}A + \sin^2\varphi \int\limits_A x^2\,\mathrm{d}A =$$
$$= I_x\cos^2\varphi - I_{xy}\sin 2\varphi + I_y\sin^2\varphi.$$

Ako sada iskoristimo poznate trigonometrijske relacije:

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}; \quad \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2},$$
$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi; \quad 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi,$$

dobijamo:

$$I_\xi = \tfrac{1}{2}(I_x + I_y) + \tfrac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\varphi - I_{xy}\sin 2\varphi. \tag{4.13}$$

Na sličan način dobijamo veze i za preostale momente inercije:

$$I_\eta = \tfrac{1}{2}(I_x + I_y) - \tfrac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\varphi + I_{xy}\sin 2\varphi, \tag{4.14}$$
$$I_{\xi\eta} = \tfrac{1}{2}(I_x - I_y)\sin 2\varphi + I_{xy}\cos 2\varphi. \tag{4.15}$$

4.3 Glavni momenti inercije

Iz prethodnih relacija vidi se da se pri rotaciji koordinatnog sistema menjaju i vrednosti momenata inercije. Često, u zadacima, potrebno je naći položaj koordinatnog sistema za koji su najveće vrednosti momenata inercije. Uvedimo prvo sledeći pojam:

Definicija:

Glavne momenti inercije su ekstremne vrednosti aksijalnih momenata inercije.

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Nađimo sada ove vrednosti. Posmatrajući relacije (4.13)-(4.15) vidimo da su odgovarajući aksijalni momenti inercije funkcije ugla φ (poznati su momenti inercije za x, y ose), pa ekstremnu vrednost nalazimo iz jednačina:

$$\frac{\mathrm{d}I_\xi}{\mathrm{d}\varphi} = 0; \quad \frac{\mathrm{d}I_\eta}{\mathrm{d}\varphi} = 0,$$

odnosno

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I_\xi}{\mathrm{d}\varphi} &= -(I_x - I_y)\sin 2\varphi - 2I_{xy}\cos 2\varphi = 0, \\ \frac{\mathrm{d}I_\eta}{\mathrm{d}\varphi} &= (I_x - I_y)\sin 2\varphi + 2I_{xy}\cos 2\varphi = 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Odavde dobijamo:

$$\mathrm{tg} 2\varphi = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}. \tag{4.17}$$

Rešenja ova jednačine su:

$$2\varphi_0 = \mathrm{arctg}\left(-\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}\right) + k\pi \quad \Rightarrow$$
$$\varphi_0 = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(-\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}\right) + \frac{1}{2}k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Dakle, kao rešenje dobijamo dva ortogonalna pravca, recimo "1" i "2". Ove pravce nazivamo glavnim osama, za datu tačku.

☞ Napomenimo, još jednom, da glavne pravce možemo da dobijemo u svakoj tački preseka.

Da bismo sada odredili $I_\xi|_{\varphi=\varphi_0}$ i $I_\eta|_{\varphi=\varphi_0}$, potrebno je da, prema (4.13) i (4.14), izrazimo $\sin 2\varphi_0$ i $\cos 2\varphi_0$ preko $\mathrm{tg}2\varphi_0$:

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi_0 &= \frac{\mathrm{tg}2\varphi_0}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 2\varphi_0}} = -\frac{2I_{xy}}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}, \\ \cos 2\varphi_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 2\varphi_0}} = -\frac{I_x - I_y}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Konačno, zamenom (4.18) u (4.13)-(4.15), dobijamo:

$$I_\xi|_{\varphi=\varphi_0} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = I_1, \tag{4.19}$$
$$I_\eta|_{\varphi=\varphi_0} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = I_2, \tag{4.20}$$
$$I_{\xi\eta}|_{\varphi=\varphi_0} = 0 = I_{12}. \tag{4.21}$$

☞ Napomenimo da sa I_1, po dogovoru, označavamo veći moment inercije. Prema (4.21) centrifugalni moment inercije za glavne ose jednak je nuli. Sabirajući (4.19) i (4.20) dobijamo:

$$I_1 + I_2 = I_x + I_y. \tag{4.22}$$

Odavde zaključujemo da je zbir aksijalnih momenata inercije, u odnosu na dve ortogonalne ose, **invarijantan** (nepromenjen) u odnosu na rotaciju koordinatnog sistema. Ova osobina neposredno sledi i iz (4.10).

U prethodnim izvođenjima (glavni momenti inercije) koordinatni početak bila je proizvoljna tačka. Međutim, ako je koordinatni početak u težištu tada govorimo o **glavnim težišnim** (centralnim) **osama** i **glavnim težišnim** (centralnim) **momentima inercije**.

☞ Napomenimo da i moment inercije, slično naponu, može da se prikaže grafičkim putem, pomoću Morovog kruga [3].

Poluprečnik inercije i elipsa inercije

Poluprečnik inercije površi, za neku osu u, definiše se relacijom:

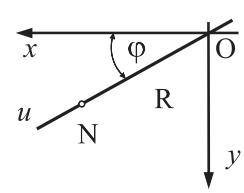
$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}, \tag{4.23}$$

gde je I_u moment inercije za osu u, a A - površina poprečnog preseka.

Jedinica poluprečnika inercije je $[m]$.

Posmatrajmo neki pravac u u koordinatnom sistemu glavnih težišnih osa x, y. Neka pravac u gradi ugao φ sa x-osom. Veza između momenata inercije za ove ose data je izrazom (4.13) (za glavne ose je $I_{xy} = 0$):

$$I_u = I_x \cos^2\varphi + I_y \sin^2\varphi. \tag{4.24}$$



Slika 4.5: Položaj ose u.

Ovu relaciju možemo da izrazimo preko poluprečnika inercije (4.23), podelivši (4.24) površinom A, u obliku:

$$i_u^2 = i_x^2 \cos^2\varphi + i_y^2 \sin^2\varphi. \tag{4.25}$$

Dalje, koordinate neke proizvoljne tačke N, sa pravca u, možemo da izrazimo u obliku (sl. 4.5):

$$x = R\cos\varphi, \quad y = R\sin\varphi, \tag{4.26}$$

[3]Konstrukcija Morovog kruga inercije data je u Dodatku ove knjige.

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

pa iz (4.25) dobijamo:

$$\frac{x^2 i_x^2}{R^2} + \frac{y^2 i_y^2}{R^2} = i_u^2 \Big| : \frac{i_x^2 i_y^2}{R^2}, \tag{4.27}$$

ili

$$\frac{x^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_x^2} = \frac{i_u^2 R^2}{i_x^2 i_y^2}. \tag{4.28}$$

Izaberimo sada tačku N', na pravcu u, tako da je:

$$\frac{i_u^2 R^2}{i_x^2 i_y^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{i_x i_y}{i_u}. \tag{4.29}$$

Sada jednačina (4.28) dobija oblik:

$$\frac{x^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_x^2} = 1,$$

što predstavlja jednačinu elipse.

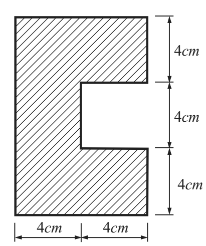
Ova elipsa zove se **centralna elipsa inercije** (centralna, jer je napisana u sistemu težišnih-centralnih osa).

Pomoću elipse inercije se može, grafičkim putem, odrediti moment inercije za neku osu u, koja gradi ugao φ sa x-osom (x je glavna težišna osa)[4].

4.4 Zadaci iz momenata inercije

Zad. 4.1.

Za poprečni presek prikazan na sl. 4.6 izračunati glavne momente inercije i poluprečnike inercije.



Slika 4.6: uz zadatak 4.1.

Rešenje:

Poprečni presek (sl. 4.6) ima osu simetrije. Koristeći svojstvo težišta, da ako površ ima osu simetrije težište se nalazi na toj osi, postavićemo jednu

[4] Videti Dodatak.

osu (x-osa) duž ovog pravca. Da bismo odredili položaj težišta na ovoj osi, drugu osu (y_1) ćemo postaviti kako je prikazano na sl. 4.7. Za ovako izabran koordinatni sistem nađimo koordinate tražene tačke.

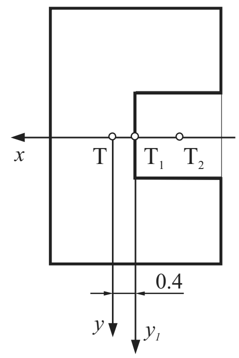
Površine:

$$A_1 = 8 \cdot 12 = 96\,[cm^2],\;\; A_2 = 4 \cdot 4 = 16\,[cm^2],$$
$$A = \sum_i A_i = A_1 - A_2 = 80\,[cm^2].$$

Težište:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -2,$$

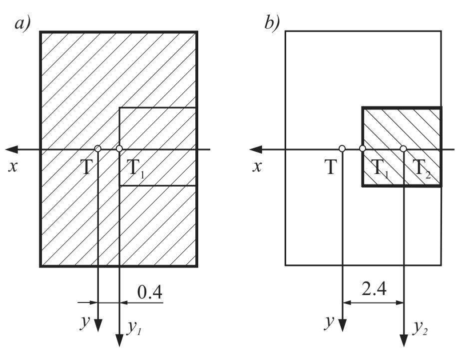
$$x_T = \frac{\sum_i x_i \cdot A_i}{\sum_i A_i} = \frac{96 \cdot 0 - 16(-2)}{80} = 0,4\,[cm].$$



Slika 4.7: Prikaz težišta površi.

Postavimo sada y osu kroz težište T, paralelno osi y_1. Ovako postavljen koordinatni sistem je centralni (težišni). Međutim, kako je x osa osa simetrije to je sistem x, y sistem glavnih osa, tj. ovo su glavne težišne ose.

Da bismo izračunali momenti inercije ovog preseka, za koordinatni sistem x, y, iskoristićemo svojstvo (vidi str. 60) da je moment inercije tela koje možemo da podelimo na konačan broj delova, jednak zbiru momenata inercije pojedinih delova. U našem slučaju, iz velikog pravougaonika 8×12, sa težištem u tački T_1 (sl. 4.8-a), isekli smo mali kvardat 4×4, sa težištem u tački T_2 (sl. 4.8-b).



Slika 4.8: Položaj težišta delova.

- x osa je težišna osa (osa simetrije) za oba kvadrata, pa je:

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = I_x^1 - I_x^2 = \frac{8 \cdot 12^3}{12} - \frac{4 \cdot 4^3}{12} = 1152 - 21,\dot{3} = 1130,\dot{6} \approx 1130,7\,[cm^4].$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

- y osa nije težišna, pa treba primeniti Štajnerovu teoremu za moment inercije za y osu:

$$I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12} = I_y^1 - I_y^2 = (I_{\bar{y}_1}^1 + A_1 \cdot d_x^{1\,2}) - (I_{\bar{y}_2}^2 + A_2 \cdot d_x^{2\,2}) =$$
$$= \left(\frac{8^3 \cdot 12}{12} + 96 \cdot 0,4^2 \right) - \left(\frac{4^3 \cdot 4}{12} + 16 \cdot 2,4^2 \right) = 512 + 15,36 - 113 =$$
$$= 413,8\dot{6} \approx 413,87 \, [cm^4].$$

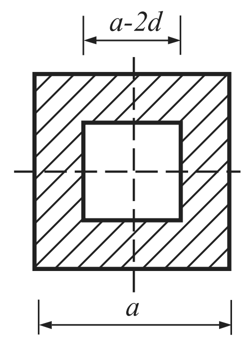
Poluprečnici inercije su:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{1130,7}{80} = 14,13 \, [cm^2] \quad \Rightarrow \quad i_x = 3,76 \, [cm],$$
$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{413,87}{80} = 5,173 \, [cm^2] \quad \Rightarrow \quad i_y = 2,27 \, [cm].$$

❑

Zad. 4.2.

Za poprečni presek prikazan na slici 4.9 (iz kvadrata $a \times a$ "isečen" kvadrat $(a - 2d) \times (a - 2d)$) izračunati glavne momente inercije i poluprečnike inercije.



Slika 4.9: uz zadatak 4.2.

Rešenje:

Zbog simetrije (ima dve ose simetrije), težište oba dela (iz velikog kvadrata stranice a isečen je kvadrat stranice $a - 2d$) se poklapaju.

- Momenti inercije su:

$$I_x = I_y = \frac{a^4}{12} - \frac{(a - 2d)^4}{12}.$$

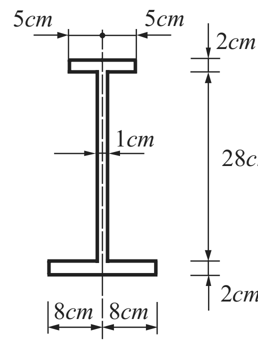
Poluprečnici inercije, kako je površina poprečnog preseka $A = a^2 - (a - 2d)^2$, su

$$i_x^2 = i_y^2 = \frac{I}{A} = \left(\frac{a^4}{12} - \frac{(a-2d)^4}{12}\right)\frac{1}{a^2-(a-2d)^2} =$$
$$= \frac{1}{12}\frac{\cancel{\left[a^2-(a-2d)^2\right]}\left[a^2+(a-2d)^2\right]}{\cancel{\left[a^2-(a-2d)^2\right]}} = \frac{a^2+(a-2d)^2}{12}.$$

❑

Zad. 4.3.

Za poprečni presek prikazan na sl. 4.10 prvo odrediti položaj težišta, a zatim izračunati glavne momente inercije i poluprečnike inercije.



Slika 4.10: uz zadatak 4.3.

Rešenje:

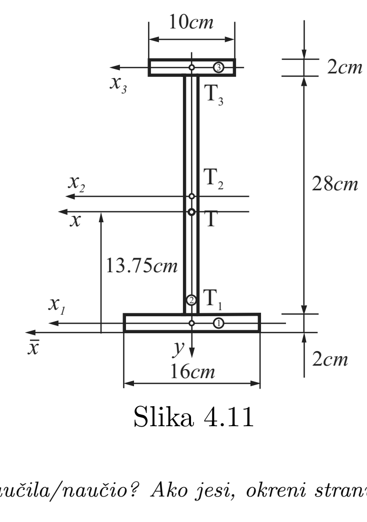
Prvo potražimo težište, koje se nalazi na y-osi, jer je to osa simetrije (videti osobinu 4.1.1, na str. 58):

- površine:

$$A = 16\cdot 2 + 1\cdot 28 + 10\cdot 2 =$$
$$= 32 + 28 + 20 = 80\,[cm^2].$$

- težište:

$$x_C = 0,$$
$$y_C = \frac{32\cdot(-1) + 28\cdot(-16) + 20\cdot(-31)}{80} =$$
$$= -13,75\,[cm].$$



Slika 4.11

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

- momenti inercije:

$$I_x = \left(\frac{16\cdot 2^3}{12} + 32\cdot(-12,75)^2\right) + \left(\frac{1\cdot 28^3}{12} + 28\cdot(-2,25)^2\right) + \\ + \left(\frac{10\cdot 2^3}{12} + 20(17,25)^2\right) = 13.141,\dot{6}\,[cm^4],$$

$$I_y = \left(\frac{16^3\cdot 2}{12}\right) + \left(\frac{1^3\cdot 28}{12}\right) + \left(\frac{10^3\cdot 2}{12}\right) = \frac{10.220}{12} = 851,\dot{6}\,[cm^4].$$

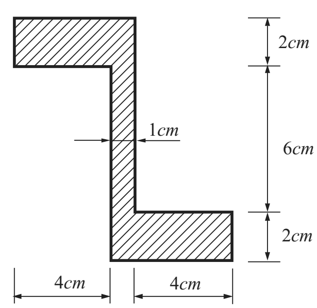
- poluprečnici inercije:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{13.141,\dot{6}}{80} = (12,8)^2\,[cm^2] \quad \Rightarrow \quad i_x = 12,8\,[cm],$$
$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{851,\dot{6}}{80} = (3,26)^2\,[cm^2] \quad \Rightarrow \quad i_y = 3,26\,[cm].$$

❑

Zad. 4.4.

Za poprečni presek prikazan na sl. 4.15 izračunati glavne momente inercije i poluprečnike inercije.



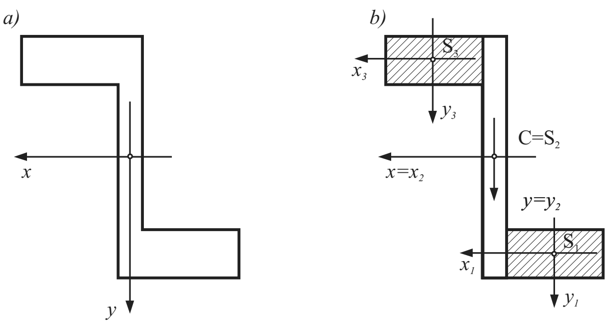
Slika 4.12: uz zadatak 4.4.

Rešenje:

Prvo odredimo težište, u odnosu na koordinatni sistem prikazan na sl. 4.13-a. Poprečni presek podelićemo na tri pravougaonika (sl. 4.13-b), pa je

$$x_C = \frac{\sum_i x_i A_i}{A} = \frac{-2,5\cdot 8 + 0 + 2,5\cdot 8}{8 + 8 + 10\cdot 1} = 0.$$

Dakle, težište preseka nalazi se u koordinatnom početku prilagođenog koordinatnog sistema.



Slika 4.13: Prilagođeni koordinatni sistem.

Izračunavanje momenata inercije, u odnosu na dati koordinatni sistem težišnih osa x, y, uradićemo na dva načina.

Prvi način za određivanje I_x. Podelimo dati presek na tri dela, kao kod izračunavanja težišta, prema sl. 4.14-a. Primenom Štajnerove teoreme, dobijamo:

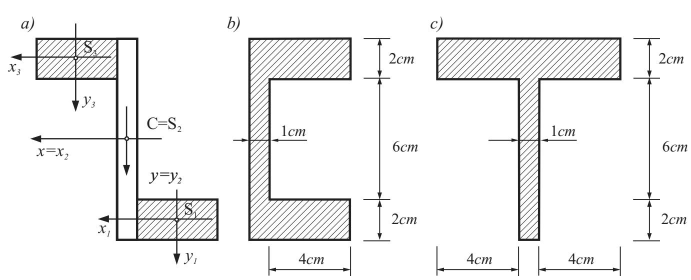
$$I_x = \frac{1 \cdot 10^3}{12} + 2\left(\frac{4 \cdot 2^3}{12} + 8 \cdot 4^2\right) = \frac{10^3 + 64}{12} + 16^2 = 344,7\,[cm^4].$$

Ovde smo iskoristili da su momenti inercije za delove 1 i 3 isti.

Drugi način za određivanje I_x. Ovde ćemo iskoristiti svojstvo momenta inercije da se njegova vrednost ne menja ako delove pomeramo paralelno osi za koju ga trežimo (vidi sl. 4.14-b):

$$I_x = \frac{1}{12}\left[5 \cdot 10^3 - 4 \cdot 6^3\right] = \frac{5000 - 864}{12} = 344,7\,[cm^4].$$

Ovim pomeranjem dobili smo dva pravougaonika za koje je x osa težišna osa (slučaj kao u zadatku 4.1).



Slika 4.14: Translacija osa.

Prvi način računanja momenta inercije I_y. I za ovu osu ćemo posmatrati

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

presek podeljen na tri dela i primeniti Štajnerovu teoremu:

$$I_y = \frac{1^3 \cdot 10}{12} + 2\left(\frac{4^3 \cdot 2}{12} + 8 \cdot (5/2)^2\right) = \frac{133}{6} + 100 = 122,1\dot{6}\,[cm^4].$$

Drugi način za određivanje I_y. U ovom slučaju pomerićemo delove paralelno y osi (vidi sl. 4.14-c). Dobijamo dva pravougaonika za koje je osa y težišna osa, pa je:

$$I_y = \frac{9^3 \cdot 2}{12} + \frac{1^3 \cdot 8}{12} = \frac{9^3 + 4}{6} = 122,1\dot{6} \approx 122,2\,[cm^4].$$

Za određivanje centrifugalnog momenta inercije, podelićemo presek na tri dela (vidi sl. 4.14-a):

$$I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + \cancelto{0}{I_{xy}^{(2)}} + I_{xy}^{(3)} = 0 + 2 \cdot 4(-2,5) \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2,5 \cdot (-4) = -160\,[cm^4].$$

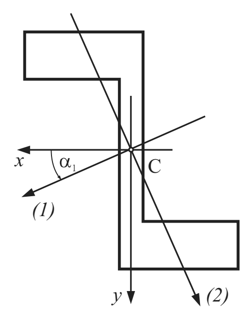
Glavne momente inercije određujemo prema (4.19) i (4.20) (vidi str. 64):

$$I_{1,2} = \frac{344,7 + 122,2}{2} \pm \sqrt{\frac{344,7 - 122,2}{2} + (-160)^2} \quad \Rightarrow$$
$$I_1 = 428,3\,[cm^4], \quad I_2 = 38,5\,[cm^4].$$

Određivanje pravaca glavnih osa:

$$\mathrm{tg}2\alpha_1 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = ... = 1,4380 > 0$$

Odavde sledi da je ugao $2\alpha_1$ u prvom kvadrantu. Kako je $I_{xy} < 0$ to sledi da je $\sin\alpha_1 > 0$, a odavde sledi da je $2\alpha_1 = 55°10'$, odnosno $\alpha_1 = 27°35'$.

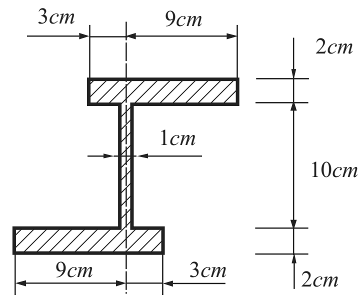


Slika 4.15: uz zadatak 4.4.

❑

Zad. 4.5.

Za poprečni presek prikazan na slici 4.16 izračunati glavne momente inercije i poluprečnike inercije.



Slika 4.16: uz zadatak 4.5.

Rešenje:

Prvo je potrebno odrediti težište. Prilagođeni koordinatni sistem dat je na sl. 4.17-a. Međutim, treba uočiti da presek ima tačku (pol) simetrije i to je baš koordinatni početak, pa prema svojstvu težišta, ta tačka je i težište. Proverimo tako što ćemo podeliti presek na tri dela (sl. 4.17-a), pa je:

$$x_T = \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i\, A_i}{A_i} = \frac{12\cdot(6) + 34\cdot 0 + 12\cdot(-6)}{6\cdot 2 + (6\cdot 2 + 10\cdot 1 + 6\cdot 2) + 6\cdot 2} = 0.$$

Dakle, postavljene ose su težišne, ali za sada ne znamo da li su i glavne.

Momente inercije ćemo, i u ovom slučaju, računati na dva načina:

- prvi, deleći presek na delove (sl. 4.17-a), koristeći Štajnerovu teoremu,
- drugi, korišćenje svojstva momenta inercije (paralelno pomeranje delova sa osom za koju se računa, sl. 4.17-b,c).

Za x osu:

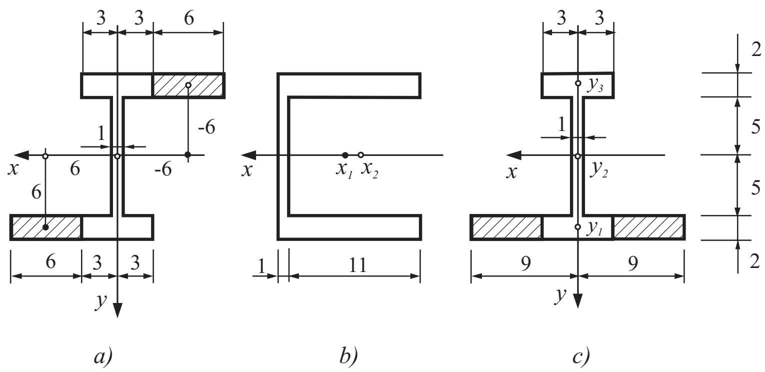
I način

$$I_x = 2\left(\frac{12\cdot 2^3}{12} + 12\cdot 2\cdot 6^3\right) + \frac{1\cdot 10^3}{12} = 1827,\dot{3}\,[cm^4].$$

II način određivanja (sl. 4.17-b)

$$I_x = \frac{12\cdot 14^3}{12} - \frac{11\cdot 10^3}{12} = 1827,\dot{3}\,[cm^4].$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!



Slika 4.17: uz rešenje zad.4.5

Za y osu:
I način

$$I_y = \frac{1^3 \cdot 10}{12} + 2\left(\frac{12^3 \cdot 2}{12} + 12 \cdot 2 \cdot 3^2\right) = 1008,8\dot{3}\,[cm^4].$$

II način (sl. 4.17-b)

$$I_y = \frac{18^3 \cdot 2}{12} + \frac{1^3 \cdot 10}{12} + \frac{6^3 \cdot 2}{12} = 1008,8\dot{3}.$$

Centrifugalni moment inercije (za delove) je:

$$I_{xy} = \cancelto{0}{I_{xy}^{(1)}} + 2I_{xy}^{(2)} = 2 \cdot 6(6 \cdot 6) + 2 \cdot 6\,[(-6) \cdot (-6)] = 4 \cdot 6^3 = 864\,[cm^4].$$

Kako centrifugalni moment inercije nije jednak nuli, to ose x, y nidu glavne. Glavne momente inercije određujemo prema (4.19) i (4.20) (vidi str. 64):

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} =$$

$$= \frac{1827,\dot{3} + 1008,8\dot{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1827,\dot{3} - 1008,8\dot{3}}{2}\right)^2 + 864^2} =$$

$$= \begin{cases} 2374\,[cm^4] = I_1 \\ 462,06\,[cm^4] = I_2. \end{cases}$$

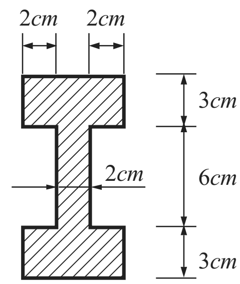
Poluprečnici inercije, prema (4.23), su:

$$i_1 = i_{\max} = 6,4\,[cm], \quad i_1 = i_{\min} = 2,8\,[cm].$$

❑

Zad. 4.6.

Za poprečni presek prikazan na slici 4.19 izračunati glavne momente inercije i poluprečnike inercije.



Slika 4.18: uz zadatak 4.6.

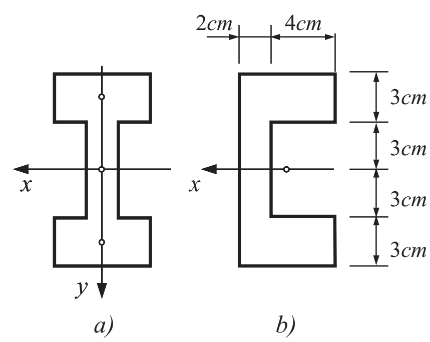
<u>*Rešenje:*</u>

Prvo uočimo da presek ima dve ose simetrije, pa se u njihovom preseku nalazi težište. Dakle, ose x, y (sl. 4.19) su težišne, ali i glavne (za ose simetrije centrifugalni moment inercije je jednak nuli, svojstvo mom. iner. na str. 60).

Za određivanje vrednosti momenta inercije za x osu paralelno (sa ovom osom) ćemo pomeriti delove (sl. 4.19-b). Za oba pravougaonika osa x je težišna osa, pa dobijamo (4.30). Pri izračunavanju za y osu podelićemo presek na tri dela, za koje je y osa težišna, pa dobijamo (4.31).

$$I_x = \frac{6 \cdot 12^3}{12} - \frac{4 \cdot 6^3}{12} = = 792\,[cm^4], \tag{4.30}$$

$$I_y = 2 \cdot \frac{6^3 \cdot 3}{12} + \frac{2^3 \cdot 6}{12} = = 112\,[cm^4]. \tag{4.31}$$



Slika 4.19: uz rešenje zadatka 4.6.

Poluprečnici inercije su:

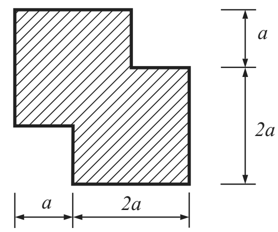
$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{792}{48} = 16,5 = (4,06)^2\,[cm^2]$$
$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{112}{48} = 2,\dot{3} = (1,527)^2\,[cm^2].$$

❑

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Zad. 4.7.

Za poprečni presek prikazan na slici 4.20 izračunati glavne momente inercije i poluprečnike inercije.

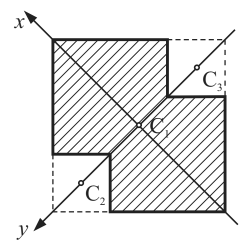


Slika 4.20: uz zadatak 4.7.

Rešenje:

Kako presek ima ose simetrije, to se u njihovom preseku nalazi težište. Na sl. 4.21 su prikazane te ose. Ose simetrije, su, prema osobini navedenoj na str. 60, i glavne ose. Pri izračunavanju momenata inercije, dati presek ćemo podeliti na tri dela (vidi sl. 4.21), naime iz kvadrata $3a \times 3a$, sa težištem u C_1, iseći ćemo dva kavdrata $a \times a$ sa težištima C_2 i C_3.

Osa x nije težišna osa za sve kvadrate, pa je potrebno primeniti Štajnerovu teoremu. Osa y prolazi kroz sva težišta, pa je ukupan moment inercije jednak zbiru/razlici sopstvenih momenata inercije, pa je:



Slika 4.21: uz rešenja zadatka 4.7.

$$I_x = \frac{(3a)^4}{12} - 2\left[\frac{a^4}{12} + a^2(\sqrt{2}a)^2\right] = \frac{31}{12}a^4,$$

$$I_y = \frac{(3a)^4}{12} - 2\frac{a^4}{12} = \frac{79}{12}a^4.$$

Kako je površina

$$9a^2 - 2a^2 = 7a^2,$$

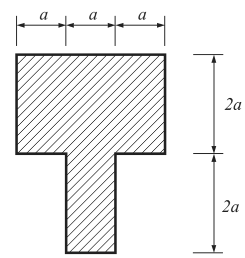
to su poluprečnici inercije:

$$i_x = \sqrt{\frac{31}{84}}\,a = 0,607\,a, \quad i_y = \sqrt{\frac{79}{84}}\,a = 0,97\,a.$$

❑

Zad. 4.8.

Za poprečni presek prikazan na slici 4.22 izračunati glavne momente inercije i odrediti poluprečnike inercije.



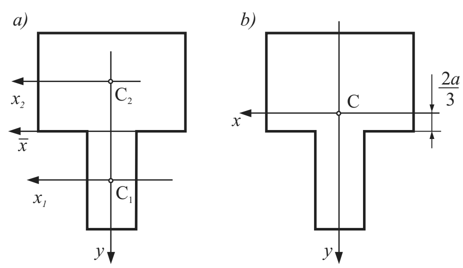
Slika 4.22: uz zadatak 4.8.

<u>*Rešenje:*</u>

Ovaj presek ima osu simetrije, pa se na njoj nalazi težište, ali se ne zna gde.

Postavićemo tako koordinatni sistem da jedna osa bude osa simetrije (recimo osa y). Drugu osu postavimo na spoju dva pravougaonika (sl. 4.23-a). Za tako postavljen koordinatni siste, težište je:

$$y_C = \frac{(-a)(6a^2) + a\cdot 2a^2}{6a^2 + 2a^2} = -\frac{2}{3}a.$$



Slika 4.23: uz rešenje zadatka 4.8.

Momenti inercije su (x osa nije težišna ni za jedan deo, pa primenjujemo Štajnerovu teoremu, a y osa je težišna za oba dela):

$$I_x = \frac{(3a)(2a)^3}{12} + 6a^2\left(\frac{1}{3}a\right)^2 + \frac{a(2a)^3}{12} + \left(\frac{5}{3}a\right)^2 \cdot 2a^2,$$
$$I_y = \frac{(3a)^3(2a)}{12} + \frac{a^3(2a)}{12} = \frac{14}{3}a^4.$$

Kako je površina poprečnog preseka $A = 6a^2 + 2a^2 = 8\,a^2$, to su poluprečnici inercije:

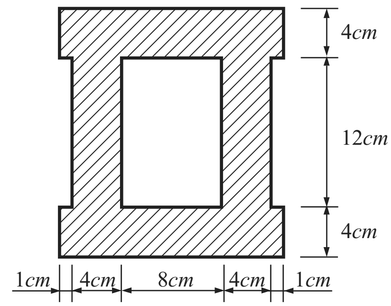
$$i_x = \sqrt{\frac{80}{9}a^4\cdot\frac{1}{8\,a^2}} = \sqrt{\frac{10}{9}}\,a, \quad i_y = \sqrt{\frac{14}{9}a^4\cdot\frac{1}{8\,a^2}} = \sqrt{\frac{7}{12}}\,a.$$

❑

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

Zad. 4.9.

Za poprečni presek prikazan na slici 4.24 izračunati glavne momente inercije i poluprečnike inercije.



Slika 4.24: uz zadatak 4.9.

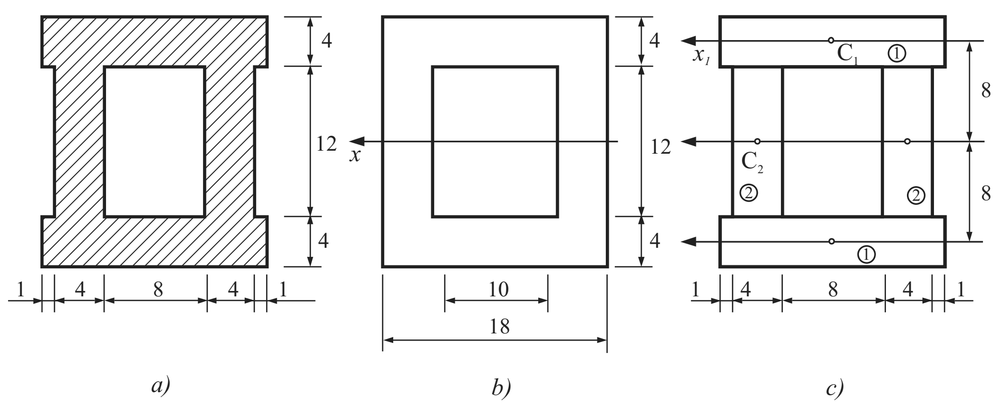
Rešenje:

Površina:

$$A = 18\cdot 20 - 8\cdot 12 - 2\cdot 12 = 240\,[cm^2].$$

Momenti inercije za I_x osu (vidi sl. 4.25):

$$I_x = \frac{18\cdot 20^3}{12} - \frac{10\cdot 12^3}{12} = 10.560\,[cm^4].$$



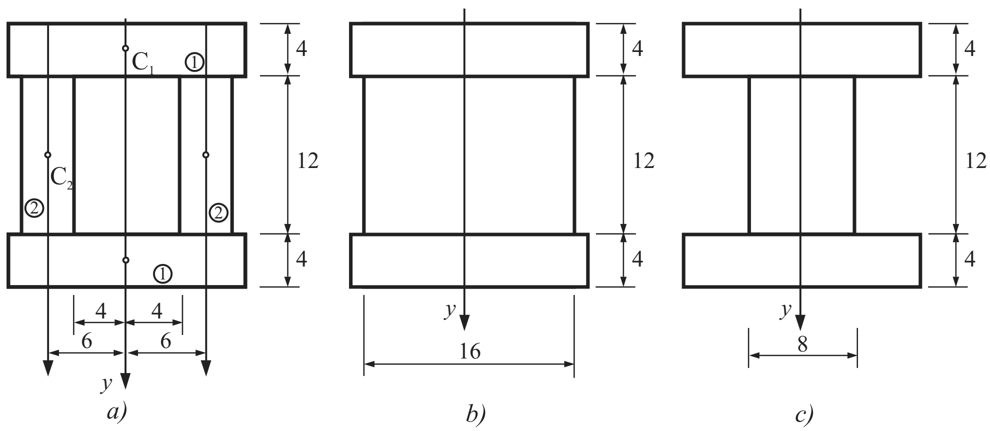
Slika 4.25: uz rešenje zadatka 4.9: za – I_x.

Drugi način (vidi sl. 4.25):

$$I_x = 2\frac{4\cdot 12^3}{12} + 2\left(\frac{18\cdot 4^3}{12} + 18\cdot 4\cdot 8^2\right) = 10.560\,[cm^4].$$

Momenti inercije za I_y osu (vidi sl. 4.26a):

$$I_y = 2\frac{18^3\cdot 4}{12} + 2\left(\frac{4^2\cdot 12}{12} + 4\cdot 12\cdot 6^2\right) = 7472\,[cm^4].$$



Slika 4.26: uz rešenje zadatka 4.9: za – I_y.

Drugi način (vidi sl. 4.26b,c):

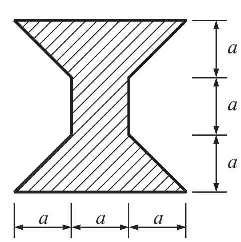
$$I_y = 2\frac{1}{12}\cdot 4\cdot 18^3 + \frac{1}{12}\cdot 12\cdot 16^3 - \frac{1}{12}12\cdot 8^3 = 7.472\,[cm^4].$$

$$i_x^2 = \frac{10560}{240} = 44 \quad \Rightarrow \quad i_x = 6,6\,[cm],$$
$$i_y^2 = \frac{7472}{240} = 31,1\dot{3} \quad \Rightarrow \quad i_y = 5,58\,[cm].$$

❑

Zad. 4.10.

Za poprečni presek prikazan na slici 4.27 izračunati glavne momente inercije i poluprečnike inercije.



Slika 4.27: uz zadatak 4.10.

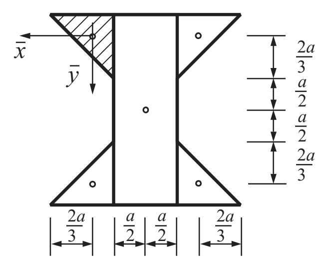
<u>*Rešenje:*</u>

Ovaj poprečni presek ima dve ose simetrije, pa se težište nalazi u njihovom preseku (sl. 4.28). Ovu površ možemo da podelimo na jedan pravougaonik ($a \times 3a$) i na četiri pravougla trougla. Kako su momenti inercije

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!

za trougao dati relacijom (13.1) (str.252), to primenom Štajnerove teoreme, dobijamo:

$$I_x = \frac{a(3a)^3}{12} + 4\left[\frac{a^4}{36} + \frac{1}{2}a^2\left(\frac{a}{2} + \frac{2a}{3}\right)^2\right] =$$
$$= \frac{61}{12}a^4,$$
$$I_y = \frac{a^3(3a)}{12} + 4\left[\frac{a^4}{36} + \frac{1}{2}a^2\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{3}\right)^2\right] =$$
$$= \frac{7}{4}a^4.$$



Slika 4.28: uz rešenje zad. 4.10.

Ove ose su i glavne ose (ose simetrije!), pa je:

$$I_1 = \frac{61}{12}a^4, \quad I_2 = \frac{7}{4}a^4.$$

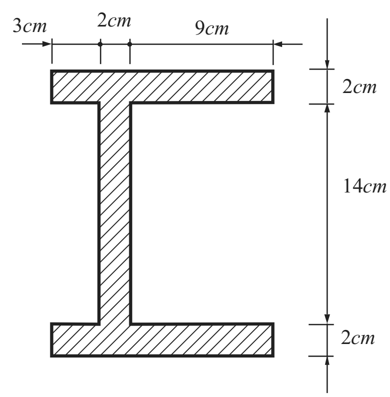
Površina ovog preseka je $A = 5\,a^2$, pa su poluprečnici inercije:

$$i_1^2 = \frac{a^4 61/12}{5\,a^2} \quad \Rightarrow \quad i_1 = \sqrt{\frac{61}{60}}\,a,$$
$$i_2^2 = \frac{a^4 7/4}{5\,a^2} \quad \Rightarrow \quad i_2 = \sqrt{\frac{7}{20}}\,a.$$

❑

Zad. 4.11.

Za poprečni presek prikazan na slici 4.29 izračunati glavne momente inercije i poluprečnike inercije.



Slika 4.29: uz zadatak 4.11.

Rešenje:

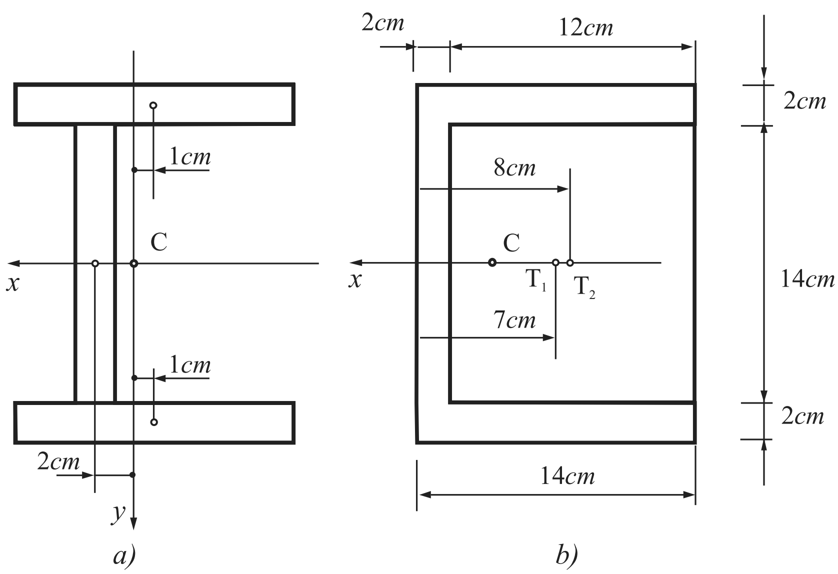
Težište:

$$x_C = \frac{2(-3)(2\cdot 14) + 0\cdot (14\cdot 2)}{3(2\cdot 14)} = -2\,[cm].$$

Moment inercije za x-osu.

I način - translacija delova, paralelno sa x-osom (videti sl. 4.30)

$$I_x = \frac{14\cdot 18^3}{12} - \frac{12\cdot 14^3}{12} = 4060\,[cm^4].$$



Slika 4.30: uz rešenje - za moment inercije I_x - prvi način.

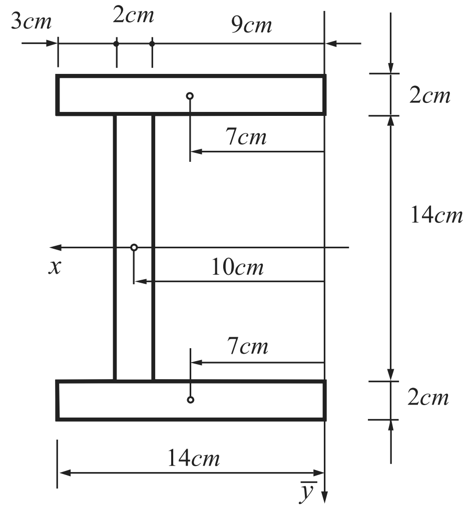
II način (videti sl. 4.31):

$$I_x = 2\left(\frac{14\cdot 2^3}{12} + 14\cdot 2\cdot 8^2\right) + \frac{2\cdot 14^3}{12} = 4060\,[cm^4].$$

Moment inercije za $y-$osu:

$$\begin{aligned} I_y &= 2\left(\frac{14^3\cdot 2}{12} + 14\cdot 2\cdot 1^2\right) + \left(\frac{2^3\cdot 14}{12} + 2\cdot 14\cdot 2^2\right) = \\ &= \frac{14^3}{3} + 2\cdot 28 + \frac{28}{3} + 8\cdot 14 = \frac{14^3 + 28}{3} + 56 + 112 = \\ &= 924 + 168 = 1092\,[cm^4]. \end{aligned}$$

Da li si naučila/naučio? Ako jesi, okreni stranu!



Slika 4.31: uz rešenje - za moment inercije I_x - drugi način.

Kako su ove ose ose simetrije, to su istovremeno i glavne ose, pa je $I_1 = I_x = 4060\,[cm^4]$, $I_2 = I_y = 1092\,[cm^4]$.

Poluprečnici inercije (površina je $A = 72$):

$$i_x^2 = \frac{4060}{72} = 56,39\,[cm^2] \quad \Rightarrow \quad i_x = 7,5\,[cm],$$
$$i_y^2 = \frac{1092}{72} = 15,17\,[cm^2] \quad \Rightarrow \quad i_y = 3,89\,[cm].$$

❑