POSEBNE METODE OPERACIONIH ISTRAŽIVANJA U LOGISTICI

LOKACIJSKI PROBLEMI

UVOD – KRATAK PREGLED

Teorija lokacije bavi se zadacima izbora jedne ili više lokacija u prostoru određene dimenzionalnosti, koje su u zadatom smislu najbolje.

Za razliku od problema prostornog raspoređivanja elemenata sistema (layout problem), problema pakovanja (packing problem) i problema sečenja (cuting problem), u kojima su male razlike u dimenzijama između objekata koji se lociraju i prostora u kome se lociraju, u lokacijskim problemima dimenzije objekata (reč objekat se upotrebljava u njenom najširem smislu što znači da pokriva i pojmove poput: sistem, element, kompleks, uređaj, materija, itd.) koje je potrebno locirati zanemarljive su u odnosu na veličinu prostora u kome se lokacije biraju (oblast, teritorija grada, regija, područje države, region koji obuhvata više država, itd.). Dakle, teorija lokacije, najčešće se bavi problemima lociranja tačke u dvodimenzionom prostoru. Postojanje interakcija između objekata koji se raspoređuju, pakuju, odnosno seku, praktično je obavezna pojava, dok interakcije između objekata koji se lociraju mogu ali i ne moraju postojati. Ovo je još jedna bitna razlika između pobrojanih problema srodnih lokacijskim problemima i njih samih.

Lokacijski problemi, prema prostoru u matematičkom smislu, u kome se donosi odluka, dele se na kontinualne, diskretne i mrežne lokacijske probleme. U kontinualnim lokacijskim problemima jedna ili više optimalnih lokacija su tačke u kontinualnom prostoru koji se posmatra, a koji je u jednostavnijem slučaju ravan. U diskretnim lokacijskim problemima postoji utvrđena lista mogućih lokacija, pa se zadatak svodi na izbor jedne ili više lokacija iz konačnog, odnosno diskretnog skupa mogućih lokacija. Kod mrežnih lokacijskih problema koristi se matematička struktura: težinski graf ili mreža, pa se zadatak izbora lokacije svodi na tretiranje mreže i izbor jednog ili više čvorova mreže (diskretni mrežni problemi) ili tačaka na granama mreže (kontinualni mrežni problemi). Većina kontinualnih problema u ravni formulisani su kao problemi nelinearnog programiranja, dok su diskretni problemi, koji su najčešće mrežno predstavljeni, uglavnom problemi binarnog celobrojnog programiranja odnosno problemi kombinatorne optimizacije.

Prilikom izbora lokacija vodi se računa o interakcijama između samih lokacija i/ili lokacija i prostorno raspoređenih korisnika. Interakcije su vrlo raznovrsne, one mogu predstavljati transporte roba ili ljudi, u regularnim ili hazardnim situacijama, fizičke veze kao što su saobraćajnice, cevovodi, kablovi, komunikacije i slično. Priroda ovih interakcija u velikoj meri je uslovljena prirodom objekata koji se lociraju, a koji prema jednoj od podela mogu biti "poželjni" i "nepoželjni".

Većina studiranih i rešavanih problema su takvi da je blizina lokacije (objekta) ono što ima vrednost tj. važi "što bliže to bolje". Veliki značaj koji se pridaje zaštiti životne sredine, u najširem smislu ovog pojma, poslednjih decenija sve intenzivnije fokusira pažnju istraživača na probleme izbora lokacija za nepoželjne objekte najrazličitijeg tipa. Tu je po pravilu, iz vizure okruženja, s obzirom na rizik od zagađenja koje nepoželjni objekti stvaraju, u regularnim i/ili posebnim uslovima, blizina lokacije hendikep. U literaturi ovi problemi poznati su kao problemi lociraranja nepoželjnih objekata (Locations of Undesirable Facilities - LUF) i to: locirani objekti izazivaju diskomfor (obnoxious facilities) i locirani objekti su štetni odnosno opasni po okruženje (noxious facilities).

Tip prostora u kome se donosi odluka kao i interakcije između samih lokacija i/ili lokacija i prostorno raspoređenih korisnika, direktno utiču na način određivanja udaljenosti (prostorne ili vremenske) između samih lokacija i/ili lokacija i korisnika. U lokacijskim problemima u ravni, za računanje udaljenosti između tačaka $A(x_A,y_A)$ i $B(x_B,y_B)$, najčešće se koriste različite l_p metrike $l_p(A,B) = \left[|x_A - x_B|^p + |y_A - y_B|^p\right]^{\frac{1}{p}}$ (p=1 – pravougaona (Menhetn) metrika, p=2 – euklidska metrika, p=∞ - Čebiševljeva metrika). U mrežnim lokacijskim problemima računanje udaljenosti uslovljeno je samom strukturom mreže (postojanjem grana na mreži) i uglavnom je to najkraći put između čvorova na mreži koji se određuje na osnovu Dijkstrinog ili nekog drugog algoritama za određivanje najkraćeg puta između svih parova čvorova.

Korisnici, odnosno njihov raspored u prostoru bitna su karakteristika lokacijskih problema, čije rešavanje vrlo često podrazumeva izbor lokacija uz istovremeno alociranje (dodeljivanje, pridruživanje) korisnika tim lokacijama (lokacijsko-alokacijski problemi).

Pored pobrojanih, karakteristike na osnovu kojih se takođe mogu praviti razlike među lokacijskim problemima su: kapacitet objekata koji se lociraju (ograničen, neograničen), broj kriterijuma optimalnosti relevantnih za problem (jedan, više), matematička priroda kriterijuma relevantnih za problem (deterministička, nedeterministička), planski horizont (statički problemi, dinamički problemi), procedure za rešavanje lokacijskih problema (intuitivni pristup, egzaktni algoritmi, heuristike, složene procedure, simulacija, ekspertni sistemi, itd.), itd.

Već se na osnovu nekoliko prethodnih pasusa može nasluti raznovrsnost lokacijskih problema, čijim se modeliranjem, formulacijom i rešavanjem bavi teorija izbora lokacije, ili jednostavno, teorija lokacije.

O ISTORIJSKOM RAZVOJU TEORIJE LOKACIJE

Tokom cele istorije ljudske civilizacije aktuelni su problemi izbora jedne ili više lokacija za određene svrhe. U dalekoj prošlosti, kao što se može i očekivati, važno je bilo odrediti dobru lokaciju crkve, mesta okupljanja ljudi za raznovrsne javne aktivnosti, lokacije za razmenu dobara ili trgovinu, itd. No bez obzira na svrhu, problemi izbora lokacije smatrani vrlo složenim problemima i u tom smislu njihovo rešavanje poveravano je mudrim i uticajnim ljudima, koji su bili u stanju da povedu računa o mnogobrojnim faktorima važnim za izbor lokacije.

Činjenica da se prvi pisani trag o lokacijskim problemima može naći u Bibliji, potvrđuje tezu o postojanju svesti, u dalekoj prošlosti, o značaju ovih problema. Naime, nakon proterivanja iz Egipta, u periodu formiranja nove države, Jevreji su imali zadatak, u vidu Božije zapovesti, da na svojoj novoj teritoriji odrede lokacije tri grada (izbeglička centra), u koje mogu da odu prognanici (na primer ubice iz nehata) i tamo budu na sigurnom. Ovaj problem, u Starom zavetu, u Petoj knjizi Mojsijevoj (Gl. 19, 1-10)[1] glasi: "1) Kad Gospod Bog tvoj potre narode kojih zemlju daje tebi Gospod Bog tvoj, i kad ih naslijediš i nastaniš se po gradovima njihovijem i po kućama njihovijem, 2) Odvoj tri grada usred zemlje svoje koju ti daje Gospod Bog tvoj da je naslijediš, 3) Načini put i razdijeli na troje krajeve zemlje svoje, koju ti da Gospod Bog tvoj u našljedstvo, pa neki bježi onamo svaki krvnik, ...". Rešenje citiranog lokacijskog problema, navodi se u Knjizi Isusa Navina (Gl. 20, 7)[2], koji je ispunio Božju volju u saradnji sa "timom donosilaca odluke" odredivši tri tražene lokacije: "I odjeliše Kedes u Galileji u gori Neftalimovoj, i Sihem u gori Jefremovoj i Kirijat-Arvu , to je Hevron u gori Judinoj". S obzirom da se u Bibliji ne objašnjava način kako se do rešenja došlo, grupa autora [Wilamowsky, Y., Epstein, S., Dickman, B., 1995.], na simpatičan način, "rekonstrisala" je postupak njegovog rešavanja, formulišući ga kao problem nalaženja tri tačke na liniji (na teritoriji Izraela, koja je dugačka i uska, u tom periodu postoji samo jedan put kojim se brzo može transportovati duž ove države, pa je pretpostavka da je samo na njemu i imalo smisla tražiti rešenje-željene lokacije) takve da i najudaljenija tačka, u odnosu na najbližu izabranu, bude na najmanjoj mogućoj udaljenosti. Postavka problema uključuje i pretpostavku da su tadašnji donosioci odluke uzeli u obzir i razlike u broju stanovnika duž teritorije, koje su opisali uprošćenom normalnom raspodelom ("trouglastom raspodelom", sa srednjom vrednošću na sredini teritorije-puta i nula vrednostima na njenim krajevima). Rešavanjem ovako postavljenog problema, pokazali su da je rešenje naznačeno u Bibliji, zapravo optimalno rešenje.

[1] Sveto pismo Staroga i Novoga zavjeta, u prevodu Đure Daničića (Stari zavjet) i Vuka S. Karadžića (Novi zavjet), Izdanje britanskog i inostranog biblijskog društva, 1985.
[2] Ibidem

Ako se gledaju matematički zaokružena dostignuća u ovoj oblasti onda je prvi značajan korak u rešavanju lokacijskih problema učinio francuski matematičar Pierre de Fermat (1601-1665). Zadajući tri proizvoljne tačke u ravni, rešavao je problem lociranja četvrte, za koju bi suma rastojanja do tri zadate tačake bila minimalna. U periodu između 1640. i 1650. godine, Evangelista Toricelli (1608-1647) i Bonaventura Francesko Cavalieri (1598-1647), radeći na Fermat-ovom problemu, primetili su da se krugovi opisani oko jednakostraničnih trouglova konstruisanih na stranicama trougla koga čine tri zadate tačke, seku u optimalnoj tački. Ovom zaključku nedostajala je uopštenost. Thomas Simpson (1710-1761) generalizovao je ovaj problem, 1750. godine, odredivši optimalnu tačku za koju je suma otežanih rastojanja do tri zadate tačke minimalna. Giovanni Francesco dé Toschi Fagnano (1715-1797) proširio je ovaj problem, zadajući četiri tačke u ravni i tražeći petu-optimalnu tačku, imajući u vidu isti kriterijum optimalnosti, kao i njegovi prethodnici. Brojni su istraživači koji su nadalje ulagali napor u rešavanje istog ili sličnih problema. Za razliku od postavki prethodnih lokacijskih problema, u smislu kriterijuma optimalnosti, James Joseph Sylvester (1814-1897) postavio je, 1857. godine, novi problem: Za zadati skup tačaka u ravni, odrediti kružnicu najmanjeg poluprečnika kojom će ove tačke biti obuhvaćene. U zadatku određivanja centra ove kružnice, po prvi put se javlja kao kriterijum optimalnosti, rastojanje do najudaljenije tačke iz zadatog skupa tačaka. Geometrijsko rešenje ovog problema formulisano je prvi put 1860. godine.

Početak razvoja teorije lokacije, vezuje se za ime Alfred Weber (1868-1958), koji je 1909. godine objavio knjigu "Über den Standort der Industrien", Tübingen. Weber je dao značajan doprinos razvoju modela za rešavanje problema lociranja teške industrije. On prepoznaje značaj sirovina u odvijanju proizvodnih procesa i u tome uticaj lokacije. U cilju minimizacije transportnih troškova, u nekim granama industrije, proizvodne pogone potrebno je približiti izvorima sirovina (na primer, količine sirovina u industriji čelika veće su od količine gotovih proizvoda), a u nekim drugim, proizvodne pogone potrebno je locirati što bliže tržištu, tj. potrošačima (na primer, voda i vazduh su sirovine prisutne svuda), zaključuje Weber. U prilog ovome, Weber je ustanovio indeks materijala koji se računa kao količnik težine sirovina koje čine ulaz i težine gotovih proizvoda koji su izlaz u proizvodnom procesu. Ako je ovaj indeks veći od jedan, lokacija proizvodnih pogona treba da bude bliža izvoru sirovina, a ako je manji od jedan, bliža potrošačima. Njegovo osnovno polazište da u izboru lokacija u industrijskoj proizvodnji, troškovi predstavljaju suštinski kriterijum u odlučivanju, kao i pretpostavke koje je uvodio u svoj model, vrlo podsećaju na rad Johann Heinrich von Thünen-a u oblasti agroekonomije, nastao skoro sto godina ranije. Razvoj proizvodnje, novih tehnologija i smanjenje transportnih troškova uticali su na nastanak lokacijskih modela koji se ne oslanjaju previše na Weberove principe. Njegova knjiga prevodom na engleski jezik, 1929. godine, "Theory of the Location of Industries", The University of Chicago Press, izlazi iz nacionalnih okvira i privlači pažnju istraživača u raznim oblastima: ekonomista, inženjera, matematičara, geografa, i mnogih drugih. Ona je napravila snažan podsticaj za rad u novoj oblasti i vrlo brzo inicirala pojavu drugih radova posvećenih izboru jedne ili više lokacija.
Sa pojavom i razvojem računarske tehnike, svakako, učinjen je značajan napredak u povećanju mogućnosti rešavanja lokacijskih zadataka postojećim modelima, metodama i algoritmima, ali i u razvijanju novih. Postavke lokacijskih problema postaju realnije i složenije. U razvoju algoritama poklanja se pažnja implementaciji.

O ZNAČAJU TEORIJE LOKACIJE

Kao što je već navedeno, brojne su naučne oblasti u okviru kojih istraživači pokazuju interesovanje za teoriju lokacije i daju značajne doprinose u razvoju iste.

Radovi iz oblasti teorije lokacije mogu se sresti u preko 100 naučno-stručnih časopisa. Kada se ovim radovima pridodaju radovi iz zbornika sa raznih naučno-stručnih skupova, knjige, monografije, magistarske i doktorske teze, posvećene ovoj oblasti, postaje jasna dimenzija interesovanja za razvoj teorije lokacije. Iscrpna lista radova iz ove oblasti (preko 3400 naslova) može se naći na adresi http://www.ent.ohiou.edu/~thale/thlocation.html.

Razlozi velikog interesovanja za razvoj teorije lokacije su mnogobrojni. Sledi nekoliko najvažnijih:

- Donošenje odluka o lociranju nekog objekta je vrlo prisutna pojava kako na makro, tako i na mikro ekonomskom nivou, u inženjerskoj praksi, u javnim službama, vojsci, itd.
- Ovakve odluke su obično strateške prirode, tj. podrazumevaju velika ulaganja u realizaciju objekata na izabranim lokacijama, čiji su ekonomski efekti dugoročni. U privatnom sektoru ovakve odluke najčešće se donose sa ciljem poboljšanja statusa određene firme na tržištu. U javnom sektoru, one utiču na efikasnost u obezbeđivanju usluga koje su pod nadležnošću državnih organa, a samim tim i na sposobnost tih organa da privuku sve vrste ekonomskih aktivnosti. Poslednjih decenija rad u ovoj oblasti ima veliku ulogu u borbi za očuvanje životne sredine i povećanje kvaliteta življenja.
- Pokazuje se da izbor lokacija, a naročito izbor optimalnih lokacija, predstavlja izazovan teorijski problem. Reč je o vrlo složenim, multidisciplinarnim problemima gde su i postavke problema izvanredno složeni zadaci, a njihovo rešavanje traži poznavanje više matematičkih teorija i vrlo intenzivnu primenu računara.
- Lokacijski problemi su obično originalno definisani u skladu sa konkretnom postavkom problema. Preciznije, i ograničenja i kriterijumi optimalnosti tj. funkcija cilja, menjaju se u zavisnosti od konkretne problematike i moraju se identifikovati za svaki zadatak posebno.

Pristup lokacijskim problemima može biti teorijski (opšti) i praktičan. Teorijskim pristupom se, korišćenjem različitih analitičkih metoda, teži iznalaženju (najboljeg mogućeg) rešenja za prethodno formulisan opšti lokacijski problem. Ovaj pristup često podrazumeva postojanje nekih ograničenja i pretpostavki. Praktičnim pristupom se traže postavke i rešenja za realne, u praksi nastale lokacijske probleme. Međutim, za oba pristupa u modeliranju i rešavanju lokacijskih problema naročito se nameću sledeća zapažanja:

- Veliki broj lokacijskih problema svrstava se u NP-teške zadatke kombinatorne optimizacije (obim računanja eksponencijalno raste sa porastom broja potencijalnih lokacija - ovi problemi su najčešće formulisani u vidu celobrojnog programiranja), pa je dobijanje optimalnih rešenja limitirano obimom problema. U tom smislu, poželjno je razvijati i implementirati razne heuristike koje mogu da podrže dobijanje rešenja i u slučaju obimnih i kompleksnih lokacijskih problema kakvi se u realnosti sreću.
- Često se lokacijski problemi predstavljaju u svetlu višekriterijumskih optimizacionih zadataka, jer je teško interpretirati sistem vrednosti u lokacijskim problemima putem jednog kriterijuma. To istovremeno znači da se u lokacijskim problemima ne može isključiti subjektivizam, kako u postavci problema, tako i u tumačenju rešenja. Zadatak je teorije da se subjektivni faktori u lokacijskim problemima stave u racionalne i kontrolisane okvire.
- U lokacijskim problemima, u praksi, ne mogu se izbeći raznovrsni izvori i tipovi neizvesnosti. To čini probleme izbora lokacija još izazovnijim, a zadatak teorije je da neizvesnosti u lokacijskim problemima opiše što adekvatnijim formalnim – matematičkim strukturama, koje danas stoje na raspolaganju: stohastičke teorije, teorija fazi skupova, teorija grubih skupova, itd.

O RAZNOVRSNOSTI LOKACIJSKIH PROBLEMA

Teoretičari i praktičari razvili su veliki broj modela, i u skladu sa tim nude veliki broj načina za rešavanje problema iz oblasti teorije lokacije. Obilje raspoloživog materijala, odnosno, mnoštvo informacija o tipovima lokacijskih problema i načinima njihovog rešavanja (o čemu je već bilo reči u uvodnom delu ovog poglavlja) predstavlja objektivnu prepreku postojanju standardizovane klasifikacione šeme problema u ovoj oblasti.

U ovom poglavlju predstavljene su neke od "značajnijih" klasa lokacijskih problema imajući u vidu kriterijume optimalnosti na kojima su zasnovane njihove postavke.

Svi kriterijumi optimalnosti, koji se sreću u jednokriterijumskim lokacijskim zadacima, generalno se mogu podeliti na: troškovne kriterijume koje treba minimizirati i benefitne kriterijume koje treba maksimizirati.

Većina jednokriterijumskih zadataka, koji se mogu smatrati klasičnim u teoriji lokacije, formulisani su tako da minimiziraju neku vrstu troškova. Udaljenost (prostorna ili vremenska) potencijalne lokacije od korisničkog punkta je najčešće korišćena veličina kojom se izražavaju troškovi. Poznatiji troškovni kriterijumi tog tipa su minimax i minisuma.

Otežano ili neotežano rastojanje ili vreme putovanja od potencijalne lokacije (objekta opsluživanja) do najudaljenijeg korisničkog punkta (i/ili obrnuto tj. od korisničkog punkta do objekta opsluživanja) je kriterijum optimalnosti koji karakteriše minimax lokacijske probleme tipa "što bliže to bolje". To je takozvana optimizacija "najgore varijante". Ovaj kriterijum prisutan je najčešće u problemima razmeštaja hitnih službi (bolnice, vatrogasne službe, policijske stanice, itd.), koji se u mrežnoj interpretaciji nazivaju i problemi centra, jer se najbolja lokacija na mreži u svetlu predstavljenog kriterijuma naziva centar mreže. U opštem slučaju problemi određivanja većeg broja lokacija na osnovu minimax kriterijuma nazivaju se p-centar problemi. Kada se tražene lokacije mogu naći i duž grana mreže tada ovi problemi nose naziv apsolutni p-centar problemi.

U slučaju lokacijskih problema tipa LUF, jedan od popularnijih načina tretiranja nepoželjne lokacije, je postavljanje nepoželjnih objekata što je moguće dalje od osetljivih mesta u prostoru. To se postiže maksimiziranjem rastojanja do najbližeg korisničkog punkta (anti-centar problemi).

Još jedan od kriterijuma optimalnosti baziranih na rastojanju jeste (otežana ili neotežana) suma najkraćih rastojanja od mesta opsluživanja do svih korisnika (i/ili obrnuto). Ovakvi lokacijski zadaci (minisuma zadaci) sreću se u praksi vrlo često, na primer prilikom izbora lokacija za podstanice u elektroenergetskoj mreži, komutacionih centara u telekomunikacionoj mreži, skladišta i drugih logističkih centara na putnoj mreži, itd. U opštem slučaju problemi određivanja većeg broja lokacija na mreži na osnovu minisuma kriterijuma nazivaju se p-medijan problemi (1-medijan problem naziva se Weberov problem, u čast začetnika teorije lokacije Alfreda Webera).

Ako je lokacijski zadatak tipa LUF, a cilj u izboru lokacije za nepoželjni objekat najveća globalna zaštita svih postojećih osetljivih mesta u prostoru, za kriterijum optimalnosti odabira se suma svih negativnih efekata. Lokacijski zadatak se svodi na odabiranje one lokacije kojom se minimizira ova suma. U literaturi je ovaj problem dobio naziv anti-Weber problem.

U literaturi se, u određivanju lokacije za postavljanje objekta opsluživanja, može sresti kriterijum optimalnosti koji predstavlja linearnu kombinaciju kriterijuma minimax i minisuma (medi-centar ili cent-dijan problem).

Kriterijum optimalnosti troškovnog tipa može biti definisan i kroz ukupan broj mesta (objekata) opsluživanja u posmatranoj oblasti. Tada se zadaci optimalnog izbora lokacije svode na minimizaciju zadatog broja objekata opsluživanja unutar posmatrane oblasti, imajući u vidu da nijedan korisnik ne bude udaljeniji više nego što je propisano (zadato) od objekta opsluživanja (set covering location problem). Nije redak primer u praksi da za opsluživanje pojedinih korisnika jedan objekat opsluživanja nije dovoljan (na primer broj vatrogasnih stanica u okolini naftne industrije). Tada se posmatrani problem proširuje u smislu određivanja minimalnog broja objekata opsluživanja koji će zadovoljiti takvu tražnju.

U nekim radovima se za kriterijum optimalnosti usvaja ukupni trošak izražen, na primer, kroz fiksne i transportne troškove koji se odnose na posmatranu lokaciju. Jednostavni lokacijski problemi u ravni (simple plant location problems) su primeri korišćenja ove vrste kriterijuma. Ovi problemi mogu imati sledeće pojavne oblike: ograničen kapacitet lokacija (capacitated plant location problems), kombinacija postojanja i nepostojanja kapacitivnih ograničenja lokacija (mixed plant location problem), postojanje promena u korisničkoj tražnji tokom vremena (dynamic location problem), itd.

U lokacijskim-ruting problemima (location-routing problems) istovremeno se određuju lokacije objekata opsluživanja i rute kojima se kreću prevozna sredstva. U opštem slučaju zadatak je odrediti broj i lokacije objekata opsluživanja tako da se minimizira suma operativnih troškova lokacija i troškovi rutinga. Problemi transporta i lociranja opasnih materija takođe su vrlo prisutni u literaturi.

Problemi lociranja habova (hub location problems), kao specijalan slučaj lokacijskih-ruting problema, prisutni su u mrežama za isporuku ekspres pošiljaka, telekomunikacionim mrežama, kod avio i drumskih prevozilaca, itd. Mreže ovog tipa obezbeđuju povezivanje izvorišnih i odredišnih čvorova (korisničkih punktova) rutiranjem tokova preko habova. Opšti tip hab lokacijskog problema uključuje lociranje habova, gde se kao kriterijum optimalnosti koji se minimizira pojavljuje suma (otežanih) rastojanja (vremena putovanja) od svakog izvorišnog čvora preko haba do svakog odredišnog čvora, i definisanje ruta za transportne tokove između izvorišnih i odredišnih čvorova.

Jedna klasa lokacijsko-alokacijskih problema za kriterijum optimalnosti koji se maksimizira odabira broj korisničkih punktova koji su od potencijalnog objekta opsluživanja udaljeni ne više od nekog propisanog (zadatog) rastojanja. Pri tome je uobičajeno dodeliti relativne važnosti korisničkim punktovima koji se opslužuju. Relativna važnost korisničkog punkta je najčešće broj koji je u proporciji sa brojem korisnika usluge koji se nalaze u oblasti koja je reprezentovana korisničkim punktom. U tom slučaju cilj je maksimizirati otežani broj korisničkih punktova koji su unutar opslužne oblasti, optimalnim izborom lokacije za objekat opsluživanja (ili lokacija za zadati broj objekata opsluživanja) (maximal covering location problem). Zadatak se može dodatno "obogatiti" nekim realnim zahtevima koji se moraju ispoštovati (na primer za opsluživanje pojedinih korisnika potrebno je više od jednog objekta opsluživanja).

U anti-covering lokacijskim problemima (anti-covering location problems) kriterijum optimalnosti koji se maksimizira je (otežani) broj lokacija koje zadovoljavaju uslov da su sve na međusobnoj udaljenosti ne manjoj od neke unapred zadate. Ovi problemi su prepoznatljivi kao LUF problemi, mada su prisutni i u slučajevima lociranja uslužnih objekata kod kojih koncept pokrivanja insistira na minimumu dozvoljene udaljenosti između tih objekata.

Problemi lociranja objekata opsluživanja u oblasti gde već postoji izvestan broj konkurentskih objekata opsluživanja predstavlja posebnu klasu lokacijskih problema (competitive location problem). Prvu formulaciju problema ovog tipa dao je Hotelling, 1929. godine, koji je razmatrao problem lociranja dva konkurentska prodajna mesta duž prave linije. Brojni su radovi posvećeni rešavanju lokacijskih problema ovog tipa, u kojima je generalno govoreći kriterijum optimalnosti ostvarivanje maksimalnog profita ili maksimalnog učešća na tržištu.

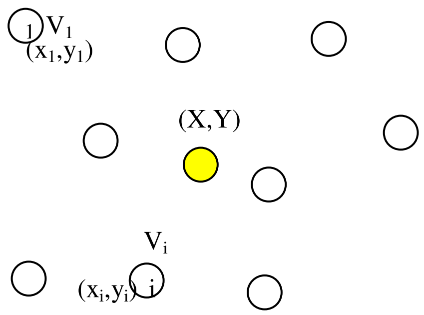
U nekim radovima, koji se bave problemima lociranja objekata opsluživanja kod kojih tražnja korisnika za uslugom zavisi od njene cene i/ili rastojanja od korisnika do objekta opsluživanja, kao kriterijum optimalnosti koji treba maksimizirati pojavljuje se: ukupan ostvareni profit, kada objekti opsluživanja pripadaju privatnom sektoru, odnosno nivo društvenog standarda, kada pripadaju javnom sektoru.

S obzirom da se u praksi često putem samo jednog kriterijuma ne može na najbolji način interpretirati celovit sistem vrednosti u realnom zadatku izbora lokacije, broj relevantnih kriterijuma optimalnosti postaje veći od jedan i zadatak izbora lokacija postaje višekriterijumski zadatak. U ovakvim zadacima izbora lokacija prisutan je interdisciplinarni pristup u definisanju kriterijuma optimalnosti, jer oni treba da reflektuju ne samo direktne fizičko-tehničke efekte, već i ekonomske, pravne, kadrovske, ekološke i druge karakteristike lokacije.

Analizirajući višekriterijumske lokacijske probleme, koji se sreću u literaturi, uočeno je da se većina kriterijuma optimalnosti sadržanih u tim problemima, može klasifikovati u četiri opšte kategorije, i to: troškovni kriterijumi, kriterijumi zadovoljenja tražnje, kriterijumi ostvarenja dobiti (profita) i kriterijumi zaštite životne sredine. Jasno je da između pobrojanih kategorija postoji izvesno preklapanje. Na primer, minimizacija troškova i zadovoljenje tražnje tržišta, u mnogim slučajevima, mogu se smatrati surogatom za uvećanje dobiti. Ipak, ova podela kriterijuma u četiri navedene kategorije ima za cilj da na najbolji način reprezentuje teoretski i matematički pristup u konkretnim višekriterijumskim lokacijskim problemima koji se sreću u literaturi.

GRAVITACIONI MODEL ZA ODREĐIVANJE LOKACIJE U KONTINUALNOM SLUČAJU

Ideja algoritma je u izboru lokacije na bazi nalaženja težišta prostora u kome su smešteni korisnici. Težište se nalazi na bazi minimalnog transportnog rada (proizvod ukupnih zahteva korisnika i rastojanja od njih do tražene lokacije). Koordinate korisnika su poznate, a koordinate željene lokacije(X,Y) treba naći. Pri tome, izabrana lokacija može biti bilo gde u prostoru na kome se nalaze korisnici. Na Slici 1. lokacije korisnika prikazane su belim kružićima, a izabrana lokacija žutim.



Slika 1. Raspored korisnika i gravitacioni centar mreže

Jedan od pristupa koji pojednostavljuje proračun jeste da se euklidsko rastojanje do nepoznate lokacije težišta sa koordinatama (X,Y) aproksimira kvadratom tog rastojanja. Tada se težište određuje iz uslova da funkcija cilja Z dostigne minimum u tačkama (X,Y)

$$Z = \sum_{i=1}^{n} V_i \cdot \left[(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 \right]$$

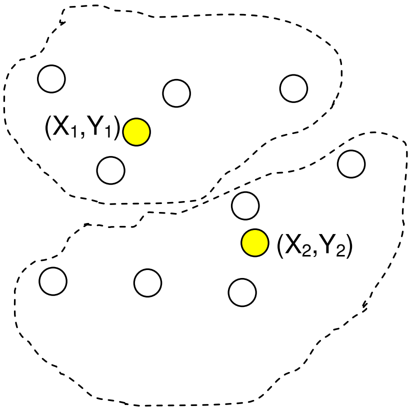
Koordinate težišta su

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i \cdot X_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}, Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i \cdot Y_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i}$$

Primena gravitacionog metoda na rešavanje problema izbora više lokacija

Ideja korišćena kod gravitacionog metoda može se koristiti i za rešavanje problema izbora više lokacija u kontinualnom slučaju.

U prvom koraku se primenom neke od tehnika sprovodi grupisanje korisnika (formira se željeni broj klastera) u određeni broj grupa a onda se u okviru svake grupe nalazi težište, tj. željena lokacija. Za određene lokacije po klasterima vrši se optimalno alociranje korisnika i za tako alocirane korisnike ponovo se utvrđuje težište. Postupak se ponavlja sve dok od svakog gravitacionog centra svi korisnici tog klastera nisu najmanje udaljeni (Slika 2).



Slika 2. Lokacija dva gravitaciona centra

MREŽE U MODELIMA LOKACIJSKIH PROBLEMA

Intuitivno se može razumeti da je težinski graf ili mreža idealna matematička struktura za modeliranje lokacijskih zadataka. Mnogi lokacijski problemi mogu se predstaviti koristeći jezik teorije grafova i mreža i rešavati primenom rezultata ove teorije. Pitanje koje se u startu nameće je: Zašto su graf odnosno mreža matematički koncepti koji se često koriste u modeliranju lokacijskih problema? Odgovor na ovo pitanje sledi iz same definicije grafa. Neka je N neprazan skup i ρ binarna relacija u N. Uređen par G=(N, ρ) naziva se graf. Elementi skupa N su čvorovi grafa, a elementi skupa ρ grane grafa.

Graf se može predstaviti crtežom, odnosno geometrijskom interpretacijom, na sledeći način. Elementi skupa N={1,...,i,j,...,n}, čvorovi grafa predstavljaju se kao tačke u ravni (ili prostoru). Ako je $(i,j)\in\rho$, tačku koja predstavlja čvor *i* spajamo neprekidnom linijom sa tačkom koja predstavlja čvor *j*. Ova linija se orijentiše strelicom u smeru od *i* ka *j*. Ako $(i,j)\notin\rho$ čvorovi *i* i *j* nisu na crtežu direktno povezani. Ako paru čvorova *i*, *j* odgovaraju dve grane (i,j) i (j,i) na crtežu se ponekad ne povlače dve linije između čvorova *i* i *j* nego se jedinstvena linija dvostrano orijentiše ili se uopšte ne orijentiše. Grana koja spaja čvor sa samim sobom naziva se petlja.

Graf G=(N, ρ) je simetričan ili neorijentisan ako i samo ako je ρ simetrična relacija.

Graf G=(N, ρ) je nesimetričan ili orijentisan ako i samo ako je ρ nesimetrična relacija.

Za proizvoljan graf, umesto G=(N, ρ) često se piše G=(N,A), pri čemu se zaobilazi pojam binarne relacije i A tumači kao skup uređenih parova elemenata skupa N, tj. kao skup grana.

U mnogobrojnim zadacima modeliranja lokacijskih problema, čvorovi predstavljaju potencijalne lokacije za objekat (objekte) koji želimo locirati i/ili korisničke punktove, a grane grafa odgovaraju saobraćajnicama, komunikacionim linijama, električnim vodovima, itd.

Pretpostavimo sledeće:

- Svakoj grani $(i,j)\in A$ pridružuje se jedan ili više skalara koji su parametarski reprezenti njene dužine, propusne moći (ili kapaciteta), pouzdanosti, itd.
- Svakom čvoru $j\in N$ pridružuje se jedan ili više skalara koji su parametarski reprezenti njegove važnosti, propusne moći (ili kapaciteta), pouzdanosti, itd.

Ako se elementima skupa N i elementima skupa A, kao što je pretpostavljeno, pridruže skalari, onda se takav graf obično u literaturi naziva *težinski graf* ili *mreža*.

Najčešće je u modeliranju lokacijskih problema mrežom:

- Svakoj grani $(i,j)\in A$ pridružen jedan nenegativni skalar c_{ij} koji je parametarski reprezent rastojanja (ili vremena putovanja, troškova putovanja, itd.) između dva čvora povezana granom.

- Svakom čvoru $j \in N$ pridružen jedan nenegativni skalar V_j, težinski koeficijent čvora, koji reprezentuje njegovu važnost: što je veće V_j, čvor $j \in N$ je važniji.

U mrežnim problemima obično se polazi od pretpostavke da je mreža povezana. Za mrežu se kaže da je povezana ako između bilo koja dva čvora mreže postoji put, pri čemu je put između čvorova *i* i *j* niz različitih susednih čvorova.

Mrežu, za koju važi da je $c_{ij} = c_{ji}$ za svako $(i,j) \in A$, zovemo neorijentisanom ili simetričnom. U praksi, za potrebe postavke i rešavanja lokacijskih zadataka, posebno su interesantne orijentisane tj. nesimetrične mreže, kod kojih može važiti $c_{ij} \neq c_{ji}$. Mreža je orijentisana ako su grane u njoj određene parovima čvorova (i,j).

U lokacijskim problemima, skup čvorova na mreži može biti takav da su svi čvorovi istovremeno i potencijalne lokacije i korisnički punktovi, ali i takav da su neki čvorovi isključivo potencijalne lokacije koje čine podskup čvorova $I \subseteq N$, a neke isključivo korisnički punktovi koje čine podskup čvorova $J \subseteq N$. Takođe važi da je $N = I \cup J$. U narednim odeljcima u kojima su predstavljeni neki mrežni lokacijski problemi, skup čvorova na mreži je tretiran tako da su svi čvorovi istovremeno i potencijalne lokacije i korisnički punktovi, čime se ne gubi na opštosti, jer su potrebne neznatne modifikacije da bi se neki od algoritama prilagodili slučaju kada to nije tako.

Za rešavanje lokacijskih problema na mreži, koja se može predstaviti u ravni, razvijaju se različiti modeli. Opšti mrežni lokacijski problem se inače predstavlja u sledećem obliku: odrediti čvor (čvorove) koji ima(ju) najbolje karakteristike u zadatom smislu. U ovakvim modelima se koristi pojam *rastojanja između dva čvora* mreže. To rastojanje je po definiciji dužina najkraćeg puta (vremena putovanja, troškova putovanja, itd.) između posmatranih čvorova. U literaturi su dobro poznati algoritmi za određivanje najkraćih puteva (algoritmi Dijkstra-e, Bellman-a, Dantzig-a, Floyd-a, itd. – videti u: *Transportne mreže*, Dušan Teodorović, Saobraćajni fakultet, Beograd, 2007.) Najkraće rastojanje između čvorova $i \in N$ i $j \in N$ označićemo sa d_{ij}.

CENTRI

Notacija koju smo uveli u prethodnom poglavlju važi i u slučaju definisanja problema centra. Pored prethodno navedenog označimo sa:

$i \in N$ – indeks čvorova potencijalnih lokacija za objekat opsluživanja
$j \in N$ – indeks čvorova korisnika
V_j – težinski koeficijent čvora $j \in J$ – količina tražnje u tom čvoru
d_{ij} – najkraće rastojanje između čvorova $i \in N$ i $j \in N$
p – unapred zadat broj objekata koji se locira na mreži

Definišimo binarne promenljive:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \textit{ako je čvor i izabrana lokacija za objekat opsluživanja} \\ 0, & \textit{ako ne} \end{cases}$$

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{ako čvor i opslužuje korisnike u čvoru j} \\ 0, & \textit{ako ne} \end{cases}$$

Da bi formulisali lokacijski problem određivanja p centara neophodno je uvesti još jednu promenljivu:

D – najveće rastojanje od korisnika do njemu najbližeg objekta opsluživanja.

Imajući u vidu uvedenu notaciju, lokacijski problem određivanja p centara se može formulisati kao problem binarnog celobrojnog programiranja na sledeći način:

$$min \quad D$$

pri ograničenjima

$$\sum_i Y_{ij} = 1, \quad \forall j$$

$$\sum_i X_i = p$$

$$Y_{ij} \le X_i, \quad \forall i, j$$

$$D \ge \sum_i d_{ij} Y_{ij}, \quad \forall j$$

$$X_i \in \{0,1\}, \quad \forall i$$

$$Y_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i, j$$

Funkcija cilja jednostavno teži da minimizira najveće rastojanje između bilo kog korisnika i njemu najbližeg objekta opsluživanja. Prvo ograničenje se odnosi na činjenicu da svaki korisnik mora biti opslužen iz nekog čvora koji je izabran za lokaciju na kojoj se nalazi objekat opsluživanja. Drugo ograničenje se odnosi na ukupan broj lociranih objekata koji iznosi p. Treće ograničenje kaže da se korisnici alociraju samo lokacijama koje su izabrane. Četvrto ograničenje definiše najveće rastojanje između bilo kog korisnika i njemu najbližeg objekta opsluživanja. Peto i šesto ograničenje odnose se na binarnu prirodu promenljivih X_i i Y_{ij}.

Određivanje jednog centra mreže

U problemima određivanja centra mreže, kao kriterijum optimalnosti moguće je koristiti:

a) Najkraće rastojanje od posmatranog čvora – potencijalne lokacije do najudaljenijeg čvora u mreži.
b) Najkraće rastojanje od najudaljenijeg čvora do posmatranog čvora – potencijalne lokacije.
c) Najkraće rastojanje od posmatranog čvora – potencijalne lokacije do najudaljenijeg čvora u mreži i nazad.

Ako se kao kriterijum optimalnosti koristi rastojanje od čvora-potencijalne lokacije do najudaljenijeg čvora, tada se za svaki čvor $i \in N$ određuje vrednost:

$$s_o(i) = \max_j \left[V_j \, d_{ij} \right]$$

$s_o(i)$ je maksimalna vrednost u vrsti *i* matrice D', koja nastaje množenjem kolone $j \in N$ matrice rastojanja $D=[d_{ij}]$ sa težinskim koeficijentom V_j.

Čvor i_o^* , za koji važi:

$$s_o(i_o^*) = \min_i \left[s_o(i) \right]$$

naziva se *spoljašnji centa.* Jedna mreža može imati više spoljašnjih centara.

Kada je kriterijum optimalnosti rastojanje od najudaljenijeg čvora do čvora-potencijalne lokacije, tada se za svaki čvor $i \in N$ određuje vrednost:

$$s_t(i) = \max_j \left[V_j \, d_{ji} \right]$$

$s_t(i)$ je maksimalna vrednost u koloni *j* matrice D'', dobijene množenjem vrste *i* matrice rastojanja $D=[d_{ij}]$ sa težinskim koeficijentom V_j.

Čvor i_t^*, za koji važi:

$$s_t(i_t^*) = \min_i [s_t(i)]$$

naziva se *unutrašnji centar*. Jedna mreža može imati više unutrašnjih centara.

Kada je kriterijum optimalnosti ukupno rastojanje od čvora-potencijalne lokacije do najudaljenijeg čvora i nazad, tada se za svaki čvor $i \in N$ određuje vrednost:

$$s_{ot}(i) = \max_j \left[V_j (d_{ij} + d_{ji}) \right]$$

$s_{ot}(i)$ je maksimalna vrednost u vrsti *i* matrice D''' koja nastaje množenjem kolone *j* matrice rastojanja $D=[d_{ij}+d_{ji}]$ sa težinskim koeficijentom V_j.

Čvor i_{ot}^*, za koji važi:

$$s_{ot}(i_{ot}^*) = \min_i [s_{ot}(i)]$$

naziva se *spoljašnje-unutrašnji centar*. Jedna mreža može imati više unutrašnjih centara.

U simetričnim mrežama se spoljašnji, unutrašnji i spoljašnje-unutrašnji centri mreže poklapaju.

Iz definicija spoljašnjeg, unutrašnjeg i spoljašnje-unutrašnjeg centra grafa sledi zaključak da je njihovo određivanje u računskom smislu relativno jednostavno: (1) treba odrediti najkraća rastojanja između svih parova čvorova mreže i zatim se (2) jednostavnim algebarskim operacijama množenja i pretraživanja tipa max i min nalazi korespodentni centar.

Određivanje jednog apsolutnog centra mreže

Razmotrimo ponovo problem izbora lokacije na mreži tipa minimax, ali ovoga puta tako da potencijalne lokacije nisu isključivo čvorovi mreže, već se mogu nalaziti bilo gde duž grana mreže.

Za modeliranje ovog problema koristi se pojam tačke koja pripada grafu, odnosno grani. Tačku *y* koja pripada grani (i,j) definiše dužina l(i,y) dela (i,y), pri čemu je ispunjen uslov da je $l(i,y) + l(y,j) = c_{ij}$. U posebnim slučajevima kada je $l(i,y)=0$ ili $l(i,y)=c_{ij}$, tačka *y* predstavlja krajnji čvor grane (i,j).

Lokacijski zadatak se u ovom slučaju postavlja kao nalaženje tačke grafa za koju važi da je najkraće rastojanje od nje do najudaljenijeg čvora (ili od najudaljenijeg čvora do nje) minimalno. Kao rešenje ovako postavljenog optimizacionog zadatka dobijamo *apsolutni centar*.

Obeležimo sa d(y,i) najkraće rastojanje od neke tačke *y* koja pripada grafu G do proizvoljnog čvora $i \in N$.

Za svaki čvor $i \in I$ određuje se vrednost:

$$s_o(y) = \max_i \left[V_i \, d_{y,i} \right]$$

Tačka y_o^* na grafu G, za koju važi:

$$s_o(y_o^*) = \min_{y u G} [s_o(y)]$$

gde se minimum odnosi na sve tačke (bilo da su u čvorovima ili na granama) koje pripadaju grafu G, naziva se *apsolutni spoljašnji centar*.

Dalje, za svaki čvor $i \in N$ određuje se vrednost:

$$s_t(y) = \max_i \left[V_i \, d_{i,y} \right]$$

Tačka y_t^* na grafu G, za koju važi:

$$s_t(y_t^*) = \min_{y u G} \left[s_t(y) \right]$$

naziva se *apsolutni unutrašnji centar.*

Za dobijanje apsolutnog centra simetričnog grafa (mreže) koristi se najčešće algoritam Hakimija, koji se ukratko može opisati u dva koraka (detaljnije u knjizi *Transportne mreže*, Dušan Teodorović, Saobraćajni fakultet, 2007):

i. Za svaku granu a_k grafa G naći tačku (tačke) y_k^* koja ima najmanju vrednost $s(y_k)$.

ii. Od svih tačaka y_k^* (k=1, ..., m) koje su u svojstvu lokalnih apsolutnih centara izabrati tačku sa minimalnom vrednošću $s(y_k^*)$.

Dakle, *apsolutni centar* biće ona tačka y^*, koja od svih lokalnih apsolutnih centara y_k^* (k=1, ..., m) ima najmanju vrednost $s(y_k^*)$.

Ovaj algoritam može se smatrati efikasnim ukoliko se traži apsolutni centar za graf (mrežu) koja ima manji broj čvorova (do 10). U slučajevima postojanja većeg broja čvorova primenjuju se uprošćeniji algoritmi. U svakom slučaju, obim potrebnog računanja za određivanje apsolutnog centra brzo raste sa porastom broja čvorova u mreži.

Određivanje više (p) centara mreže

Obim potrebnih računanja za određivanje višestrukih centara brzo raste sa porastom broja čvorova u mreži i porastom broja *p*. Enumerativnim postupkom generisali bi sva moguća rešenja, kojih ima $\binom{n}{p}$, za svako od tih rešenja izračunali vrednost kriterijumske funkcije, odnosno najveća otežana rastojanja između korisnika i njima najbliže lokacije, i kao najbolju kombinaciju izabrali ono rešenje za koje ovaj kriterijum dostiže minimum. U nalaženju p centara u slučaju većih mreža pribegava se korišćenju raznih aproksimativnih algoritama i heuristika.

MEDIJANE

Notacija koju smo uveli u prethodnom poglavlju važi i u slučaju definisanja problema medijane. Pored prethodno navedenog označimo sa:

$i \in N$ – indeks čvorova potencijalnih lokacija za objekat opsluživanja
$j \in N$ – indeks čvorova korisnika
V_j – težinski koeficijent čvora $j \in N$ – količina tražnje u tom čvoru
d_{ij} – rastojanje između čvorova $i \in N$ i $j \in N$
p – unapred zadat broj objekata koji se locira na mreži

Definišimo binarne promenljive:

$$X_i = \begin{cases} 1, & ako\ je\ čvor\ i\ izabrana\ lokacija\ za\ objekat\ opsluživanja \\ 0, & ako\ ne \end{cases}$$

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & ako\ čvor\ i\ opslužuje\ korisnike\ u\ čvoru\ j \\ 0, & ako\ ne \end{cases}$$

Imajući u vidu kriterijum optimalnosti koji težimo da minimiziramo u slučaju određivanja *p* medijana, a to je, kao što je već prethodno naglašeno, ukupno pređeno rastojanje (vreme putovanja) između lociranih objekata i korisnika, postavka ovog problema kao binarnog celobrojnog programiranja izgleda ovako:

$$min\ Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} V_j d_{ij} Y_{ij}$$

pri ograničenjima

$$\sum_{i \in N} Y_{ij} = 1, \quad \forall j$$
$$\sum_{i \in N} X_i = p$$
$$Y_{ij} \le X_i, \quad \forall i, j$$
$$X_i \in \{0,1\}, \quad \forall i$$
$$Y_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i, j$$

Funkcija cilja kao što je rečeno minimizira ukupno otežano pređeno rastojanje između objekata opsluživanja i korisnika. Prvo ograničenje se odnosi na činjenicu da svaki korisnik mora biti opslužen iz nekog čvora koji je izabran za lokaciju na kojoj se nalazi objekat opsluživanja. Drugo ograničenje se odnosi na ukupan broj lociranih objekata koji iznosi p. Treće ograničenje kaže da se korisnici alociraju samo lokacijama koje su izabrane. Četvrto i peto ograničenje odnose se na binarnu prirodu promenljivih X_i i Y_{ij}.

Određivanje jedne medijane mreže

Ako se kao kriterijum optimalnosti koristi suma rastojanja od čvora-potencijalne lokacije do ostalih čvorova mreže, tada se za svaki čvor $i \in N$ određuje vrednost:

$$\sigma_o(i) = \sum_{j \in N} V_j d_{ij}$$

$\sigma_o(i)$ je vrednost sume elemenata vrste *i* matrice D' dobijene množenjem kolone *j* matrice rastojanja $D=[d_{ij}]$ sa težinskim koeficijentom V_j.

Čvor i_o^*, za koji važi:

$$\sigma_o(i_o^*) = \min_i [\sigma_o(i)]$$

naziva se *spoljašnja medijanja*.

U slučaju da se kao kriterijum optimalnosti koristi suma rastojanja od čvorova mreže do čvora-potencijalne lokacije, tada se za svaki čvor *i* određuje vrednost:

$$\sigma_t(i) = \sum_j V_j \, d_{ji}$$

$\sigma_t(i)$ je vrednost sume elemenata kolone *j* matrice D'' dobijene množenjem vrste *i* matrice rastojanja $D=[d_{ij}]$ sa težinskim koeficijentom V_j.

Čvor i_t^*, za koji važi:

$$\sigma_t(i_t^*) = \min_i [\sigma_t(i)]$$

naziva se *unutrašnja medijanja.*

Konačno, kada se za kriterijum optimalnosti usvoji suma rastojanja od čvora-potencijalne lokacije do svih ostalih čvorova mreže i nazad, tada se za svaki čvor *i* određuje vrednost:

$$\sigma_{ot}(i) = \sum_j V_j (d_{ij} + d_{ji})$$

$\sigma_{ot}(i)$ je vrednost sume elemenata vrste *i* matrice D''' koja nastaje množenjem kolone *j* matrice rastojanja $D=[d_{ij}+d_{ji}]$ sa težinskim koeficijentom V_j.

Čvor i_{ot}^*, za koji važi:

$$\sigma_{ot}(i_{ot}^*) = \min_i [\sigma_{ot}(i)]$$

naziva se *spoljašnje-unutrašnja medijana.*

U simetričnim mrežama naravno da se spoljašnja, unutrašnja i spoljašnje-unutrašnja medijana poklapaju.

Iz definicija spoljašnje, unutrašnje i spoljašnje-unutrašnje medijane grafa sledi zaključak da je njihovo određivanje u računskom smislu relativno jednostavno: (1) treba odrediti najkraća rastojanja između svih parova čvorova mreže i zatim se (2) jednostavnim algebarskim operacijama sabiranja i pretraživanja tipa min nalazi korespodentna medijana grafa.

Pojam apsolutne medijane ne postoji jer se može pokazati da se apsolutna medijana uvek nalazi u nekom od čvorova mreže.

Određivanje više (p) medijana mreže

Obim potrebnih računanja za određivanje višestruke medijane brzo raste sa porastom broja čvorova u mreži i porastom broja *p*. Enumerativnim postupkom generisali bi sva moguća rešenja, kojih ima $\binom{n}{p}$, za svako od tih rešenja izračunali vrednost kriterijumske funkcije, odnosno sumu otežanih najkraćih rastojanja između korisnika i njima najbliže lokacije, i kao najbolje izabrali ono rešenje za koji ovaj kriterijum dostiže minimum.

Imajući u vidu da obim računanja brzo raste sa porastom broja čvorova u mreži i porastom broja *p,* u praksi se često koriste razne heuristike za nalaženje rešenja problema p medijane.

U nastavku biće prikazana jedna jednostavna greedy („proždrljiva”) heuristika za rešavanje problema p medijana.

Na početku primene ovog algoritma reši se problem nalaženja jedne medijane. Ovaj čvor se uvrštava u skup rešenja. U nastavku se za svaki preostali čvor računa koliko bi se smanjenje ukupnog otežanog rastojanja postiglo ako bi se on uključio u skup rešenja odnosno bio druga medijana. U skup rešenja uvrštava se onaj čvor za koji se postiže najveće smanjenje. Postupak se ponavlja dok se u skupu ne nađe željenih p medijana.

LOKACIJSKI PROBLEM POKRIVANJA SKUPA

U ovom poglavlju biće predstavljen lokacijski problem pokrivanja skupa (Set Covering Location Problem - SCLP). Limitirano vreme putovanja (dužina putovanja) od objekta opsluživanja do korisnika (na primer, radnim vremenom objekta, kvalitetom pružanja usluge koji se meri vremenom pružanja usluge, ograničenom dostupnošću u pružanju usluge kao posledica fizičkih karakteristika samog objekta, preporukama i propisima, itd.). Limitirano vreme putovanja (dužinu putovanja) možemo posmatrati kao radijus "kvazi" kružnice čiji oblik diktira konfiguracija mreže, a čiji je centar smešten u svaku od potencijalnih lokacija - čvorova. Opisujući kružnicu određenog radijusa oko svakog čvora - potencijalne lokacije, delimo čvorove - korisničke punktove na one koji se nalaze unutar kružnice i koji mogu biti opsluženi u okviru zadatog vremena putovanja (dužine putovanja) i one koji to nisu i neće biti opsluženi. Za prvu grupu korisnika kažemo da su „pokriveni" iz posmatranog čvora – potencijalne lokacije, a za drugu da to nisu. Radijus ove kružnice, odnosno unapred zadato rastojanje (vreme putovanja) koje diktira pokrivenost obeležićemo sa R. Uvedimo u razmatranje sledeće oznake:

$i \in N$ – indeks čvorova potencijalnih lokacija za objekat opsluživanja
$j \in N$ – indeks čvorova koji zahtevaju opslugu - korisničkih punktova
R – limitirano vreme putovanja (dužina putovanja) - radijus pokrivanja
$N(j) = \left\{ i \middle| d_{ij} \le R \right\}$ - skup onih lokacija $i \in N$ koje su na dozvoljenom rastojanju od korisnika $j \in N$.

Definišimo binarnu promenljivu:

$$X_i = \begin{cases} 1, & ako\ je\ čvor\ i\ izabrana\ lokacija\ za\ objekat\ opsluživanja \\ 0, & ako\ ne \end{cases}$$

Imajući u vidu uvedenu notaciju lokacijski problem pokrivanja skupa se kao problem binarnog celobrojnog programiranja definiše na sledeći način:

$$min \quad Z = \sum_i X_i$$

pri ograničenjima

$$\sum_{i \in N(j)} X_i \ge 1, \quad \forall j$$

$$X_i \in \{0,1\}, \quad \forall i$$

Funkcija cilja minimizira ukupan broj otvorenih lokacija odnosno objekata opsluživanja. Ukoliko bi uveli i troškove otvranja svake lokacije i označili ih sa c_i, tada bi funkciju cilja mogli da napišemo i kao $Z = \sum_i c_i X_i$, što bi značilo da je cilj minimizirati ukupne troškove otvaranja objekata opsluživanja. Prvo ograničenje obezbeđuje da svi korisnici imaju najmanje jednu izabranu lokaciju za objekat opsluživanja na propisanom rastojanju, odnosno da su pokriveni radijusom pokrivanja od strane makar jednog objekta opsluživanja. Drugo ograničenje odnosi se na binarnu prirodu promenljive X_i.

Rešavanje lokacijskog problema pokrivanja skupa

Enumerativnim postupkom ovaj problem bi se rešavao tako što bi se generisala sva moguća rešenja, počev od rešenja u kojima je jedan čvor izabrana lokacija, do rešenja u kome su sva rešenja izabrane lokacije. Nakon toga bi se iz skupa svih mogućih izdvojila rešenja koja su dopustiva, odnosno rešenja u kojima izabrane lokacije pokrivaju ukupnu korisničku tražnju. Nakon toga bi se za najbolje proglasilo rešenje koje minimizira kriterijumsku funkciju, tj. ukupan broj otvorenih lokacija ili ukupne troškove otvaranja lokacija.

I za potrebe rešavanja lokacijskog problema pokrivanja skupa razvijaju se razni heuristički algoritmi.

U nastavku će biti prikazana jedna greedy heuristika za nalaženje minimalnog broja lokacija koje u potpunosti pokrivaju korisničku tražnju. Ova heuristika konstruiše rešenje tako što na bazi ustanovljenog kriterijuma (grabljivog pravila) vrednuje potencijalne lokacije i u svakoj iteraciji bira po jednu od njih koju "uključuje" u rešenje. Algoritam se završava kada je izabrana i poslednja lokacija koja je učinila da su svi korisnici pokriveni.

Notacija koja će se koristiti u definisanju kriterijuma za vrednovanje potencijalnih lokacija i ostalih elemenata algoritamskog prikaza heuristika, sledi.

Neka je $\Omega^* \subseteq N$ skup svih čvorova "uključenih" u rešenje, $\Omega_t^* \subseteq \Omega^*$ skup čvorova "uključenih" u rešenje u t-toj iteraciji, $\Psi \subseteq N$ skup svih "pokrivenih" čvorova, $\Psi_t \subseteq N$ skup "pokrivenih" čvorova u t-toj iteraciji i $A_t \subseteq N$ skup "aktivnih" čvorova u t-toj iteraciji, odnosno čvorova koji su preostali da u narednoj iteraciji budu vrednovani.

Neka je $\pi(i)$ podskup svih onih čvorova $j \in A_t$ koji su pokriveni čvorom $i \in A_t$. Dakle:

$$\pi(i) = \left\{ j \mid d_{ij} \leq R,\ j \in A_t \right\}$$

Vrednovanje svakog čvora $i \in A_t$ vrši se na osnovu kriterijuma koji je definisan na sledeći način:

$$S(i) = \frac{|\pi(i)|}{c_i}$$

Kriterijum S(i) predstavlja "korist" koja bi se ostvarila izborom čvora $i \in A_t$, odnosno njegovim "uključenjem" u rešenje, a čija se vrednost izražava kroz odnos broja čvorova koji su njime pokriveni i troškova koji su potrebni za otvaranje te lokacije. U slučaju da su troškovi irelevantni, tada bi kriterijum S(i) bio jednak $|\pi(i)|$.

Algoritam:

KORAK 1 Inicijalizacija t = 1

KORAK 2 Inicijalizacija $\Omega_t^* = \varnothing$, $\Psi_t = \varnothing$, $A_t = N$

KORAK 3 Za svaki čvor $i \in A_t$ odrediti skup $\pi(i)$

KORAK 4 Za svaki čvor $i \in A_t$ izračunati vrednosti kriterijuma S(i)

KORAK 5 Odrediti čvor i^* za koji važi: $S(i^*) = \max_{i \in A_t} [S(i)]$. Ako dva ili više čvorova imaju istu maksimalnu vrednost S(i), čvor i^* izabrati proizvoljno.

KORAK 6 Postaviti t = t + 1

KORAK 7 Ažurirati skup Ω_t^*: $\Omega_t^* = \Omega_{t-1}^* \cup i^*$

KORAK 8 Ažurirati skup Ψ_t: $\Psi_t = \Psi_{t-1} \cup \{ j \mid j \in \pi(i^*) \backslash i^* \}$

KORAK 9 Ažurirati skup A_t: $A_t = A_{t-1} \backslash \{ \Psi_t \cup i^* \}$

KORAK 10 Ako je $A_t \neq \varnothing$, vratiti se na KORAK 3, u suprotnom preći na KORAK 11

KORAK 11 Usvojiti $\Omega^* = \Omega_t^*$, $\Psi = \Psi_t$

KORAK 12 Izračunati vrednost funkcije cilja Z= $\sum_{i\in\Omega^*} X_i$ (ili Z= $\sum_{i\in\Omega^*} c_i X_i$ ako postoje troškovi otvaranja lokacija)

KORAK 13 Kraj algoritma.

LOKACIJSKI PROBLEM MAKSIMALNOG POKRIVANJA

U ovom poglavlju biće predstavljen lokacijski problem maksimalnog pokrivanja (Maximal Covering Location Problem - MCLP). Za razliku od lokacijskog problema pokrivanja skupa, lokacijski problem maksimalnog pokrivanja teži da maksimizira pokrivenost korisničke tražnje sa unapred zadatim brojem lokacija na koje se mogu postaviti objekti opsluživanja. I u ovom slučaju korisnička tražnja je zadovoljena samo ako je rastojanje (vreme putovanja) između objekta opsluživanja i korisnika manje ili jednako nekom unapred zadatom. Da bi dali formulaciju ovog problema uvešćemo sledeću notaciju:

i – indeks čvorova potencijalnih lokacija za objekat opsluživanja
j – indeks čvorova koji zahtevaju opslugu - korisničkih punktova
V_j – težinski koeficijent čvora $j\in N$ – količina tražnje u tom čvoru
R – limitirano vreme putovanja (dužina putovanja) - radijus pokrivanja
p – unapred zadat broj objekata koji se locira na mreži
$N(j)=\left\{ i \middle| d_{ij} \le R \right\}$ - skup onih lokacija *i* koje su na dozvoljenom rastojanju od korisnika *j*.

Definišimo binarne promenljive:

$$X_i = \begin{cases} 1, & ako\ je\ čvor\ i\ izabrana\ lokacija\ za\ objekat\ opsluživanja \\ 0, & ako\ ne \end{cases}$$

$$Z_j = \begin{cases} 1, & ako\ je\ čvor\ j\ pokriven\ od\ strane\ nekog\ objekta\ opsluživanja \\ 0, & ako\ nije \end{cases}$$

Imajući u vidu uvedenu notaciju lokacijski problem pokrivanja skupa se kao problem binarnog celobrojnog programiranja definiše na sledeći način:

$$max \quad Z = \sum_j V_j Z_j$$

pri ograničenjima

$$Z_j \le \sum_{i\in N(j)} X_i, \quad \forall j$$

$$\sum_i X_i \le p$$

$$X_i \in \{0,1\}, \quad \forall i$$

$$Z_j \in \{0,1\}, \quad \forall j$$

Dakle, kao što je već rečeno, funkcija cilja maksimizira ukupnu pokrivenu korisničku tražnju. Prvo ograničenje određuje koji korisnički čvorovi su pokriveni odnosno koji korisnički čvorovi se nalaze na propisanom rastojanju (vremenu putovanja) od izabranih lokacija. Svaki čvor *j* može se smatrati pokrivenim (Z_j=1) ako postoji makar jedno *i* koje se nalazi unutar N_j (Čvor *i* je na rastojanju manjem ili jednakom od R u odnosu na čvor *j*) za koje važi X_i=1. Ako ne postoji takva lokacija onda je desna strana ovog ograničenja jednaka je nuli, što implicira da bude i Z_j=0. Drugo ograničenje se odnosi na ukupan broj otvorenih lokacija koji ne može biti veći od unapred zadatog broja p. Treće i četvrto ograničenje odnosi se na binarnu prirodu promenljivih X_i i Z_j.

Određivanje jedne lokacije koja maksimalno pokriva tražnju

Neka je π(i) podskup svih onih čvorova $j\in N$ koji su pokriveni čvorom $i\in N$. Dakle:

$$\pi(i)=\left\{ j \mid d_{ij} \le R, j\in N \right\}, \quad \forall i$$

Odredimo za svaki čvor $i\in N$ sledeću karakteristiku:

$$B\left(i\right)= \sum_{j\in N} V_j x_{ij} \Big| \quad x_{ij}=1,\forall\, j\in \pi(\,i\,) \;\wedge\; x_{ij}=0,\forall j\notin \pi(\,i\,)$$

B(i) predstavlja ukupan otežani broj korisničkih čvorova $j\in N$ koji su pokriveni od strane lokacije koja se nalazi u čvoru $i\in N$.

Čvor $i^*\in N$ za koji važi:

$$B(\,i^*\,)=\max_{i\in N}\left[B\left(i\right)\right]$$

može se smatrati najboljom lokacijom za zadati kriterijum optimalnosti, odnosno čvor iz koga se pokriva najveća korisnička tražnja za zadato rastojanje (vreme putovanja).

Određivanje više lokacija koje maksimalno pokrivaju tražnju

Enumerativnim postupkom generisali bi sva moguća rešenja, kojih ima $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$, za svako od tih rešenja izračunali vrednost kriterijumske funkcije, odnosno ukupan otežani broj korisničkih čvorova koji su u tom slučaju pokriveni. Za najbolje proglasili bi ono koje daje maksimalnu vrednost kriterijumskoj funkciji.

Imajući u vidu da obim računanja brzo raste sa porastom broja čvorova u mreži i porastom broja *p,* u praksi se često koriste razne heuristike za nalaženje rešenja ovog problema.

U nastavku će biti prikazana jedna greedy heuristika za nalaženje p lokacija koje maksimalno pokrivaju tražnju. Ova heuristika konstruiše rešenje tako što na bazi ustanovljenog kriterijuma (grabljivog pravila) vrednuje potencijalne lokacije i u svakoj iteraciji bira po jednu od njih koju "uključuje" u rešenje. Algoritam se završava kada je izabrano svih p lokacija, ili i ranije ako je sa brojem čvorova manjim od p pokrivena celokupna korisnička tražnja.

Notacija koja će se koristiti u definisanju kriterijuma za vrednovanje potencijalnih lokacija i ostalih elemenata algoritamskog prikaza heuristika, sledi.

Neka je $\Omega^* \subseteq N$ skup svih čvorova "uključenih" u rešenje, $\Omega_t^* \subseteq \Omega^*$ skup čvorova "uključenih" u rešenje u t-toj iteraciji, $\Psi \subseteq N$ skup svih "pokrivenih" čvorova, $\Psi_t \subseteq N$ skup "pokrivenih" čvorova u t-toj iteraciji i $A_t \subseteq N$ skup "aktivnih" čvorova u t-toj iteraciji, odnosno čvorova koji su preostali da u narednoj iteraciji budu vrednovani.

Neka je π(i) podskup svih onih čvorova $j\in A_t$ koji su pokriveni čvorom $i\in A_t$. Dakle:

$$\pi(i)=\left\{ j \mid d_{ij} \le R,\; j\in A_t \right\}$$

Vrednovanje svakog čvora $i\in A_t$ vrši se na osnovu kriterijuma koji je definisan na sledeći način:

$$B(\,i\,)= \sum_{j\in \pi(\,i\,)} V_j$$

Kriterijum B(i) predstavlja "korist" koja bi se ostvarila izborom čvora $i \in A_t$, odnosno njegovim "uključenjem" u rešenje, a čija se vrednost izražava kroz sumu težina čvorova koji su njime pokriveni.

Algoritam:

KORAK 1 Inicijalizacija t = 1

KORAK 2 Inicijalizacija $\Omega_t^* = \varnothing$, $\Psi_t=\varnothing$, $A_t=N$

KORAK 3 Za svaki čvor $i \in A_t$ odrediti skup $\pi(i)$

KORAK 4 Za svaki čvor $i \in A_t$ izračunati vrednosti kriterijuma B(i)

KORAK 5 Odrediti čvor i^* za koji važi: $B(i^*) = \max\limits_{i \in A_t} [B(i)]$. Ako dva ili više čvorova imaju istu maksimalnu vrednost B(i), čvor i^* izabrati proizvoljno.

KORAK 6 Postaviti t = t + 1

KORAK 7 Ažurirati skup Ω_t^*: $\Omega_t^* = \Omega_{t-1}^* \cup i^*$

KORAK 8 Ažurirati skup Ψ_t: $\Psi_t=\Psi_{t-1} \cup \{j \mid j \in \pi(i^*) \backslash i^*\}$

KORAK 9 Ažurirati skup A_t: $A_t=A_{t-1} \backslash \{\Psi_t \cup i^*\}$

KORAK 10 Ako je t<p, vratiti se na KORAK 3, a ako je [(t-1)=p i $A_t \neq \varnothing$] preći na KORAK 11

KORAK 11 Usvojiti $\Omega^* = \Omega_t^*$, $\Psi=\Psi_t$

KORAK 12 Izračunati vrednost funkcije cilja Z= $\sum\limits_{j \in \Omega^* \cup \Psi} V_j$

KORAK 13 Kraj algoritma.

LOKACIJSKI PROBLEM NEPOKRIVANJA

U ovom poglavlju predstavljen je *lokacijski problem nepokrivanja (Anti-Covering Location Problem – ACLP).* ACLP podrazumeva da se u skupu potencijalnih lokacija kojima su pridruženi težinski koeficijenti pokazatelji njihove važnosti, pronađe podskup takav da sve lokacije u njemu zadovolje uslov da su na međusobnoj udaljenosti ne manjoj od neke unapred zadate i da je suma težinskih koeficijenata pridruženih tim lokacijama maksimalna.

Neka je sa R označena vrednost, unapred zadate, minimalne dozvoljene udaljenosti između čvorova. Dalje, neka je Π(i) podskup onih čvorova $j \in N$ koji su od čvora $i \in N$ udaljeni manje od unapred zadate dozvoljene udaljenosti R, ($d_{ij} \leq R$), ne uključujući čvor $i \in N$, odnosno:

$$\Pi(i) = \left\{ j \mid d_{ij} \leq R, i \neq j \in N \right\}, \quad \forall i$$

Jedna postavka ACLP-a, u formi problema binarnog celobrojnog programiranja, izgleda ovako:

Max $Z = \sum\limits_i V_i X_i$

pri ograničenjima

$$MX_i + \sum_{j \in \Pi(i)} X_j \leq M, \ \forall i$$

$$X_i \in \{0,1\}, \ \forall i$$

gde je M dovoljno veliki pozitivan broj (M=n, ili ako se uloži neki dodatni računarski napor broj M se može smanjiti).

Zadatak je naći vektor rešenja $\overline{X}$ =(X_1, ..., X_i, ..., X_n), pri čemu je X_i=1, ako je lokacija koja odgovara čvoru $i \in N$ izabrana i X_i=0 u suprotnom (drugo ograničenje), koji čini da ukupna težina (korist) izabranih lokacija bude maksimalna (funkcija cilja). Prvo ograničenje se može nazvati ograničenje susedstva. Ako čvor $i \in N$ nije izabrana lokacija (X_i=0), to nema uticaja na vrednosti X_j, a ako jeste (X_i=1), svako X_j za koje važi $j \in \Pi(i)$ mora da uzme vrednost 0, jer se čvorovi $j \in \Pi(i)$ nalaze na udaljenosti manjoj od dozvoljene u odnosu na čvor $i \in N$.

Rešavanje lokacijskog problema nepokrivanja

Enumerativnim postupkom ovaj problem bi se rešavao tako što bi se generisala sva moguća rešenja, počev od rešenja u kojima je jedan čvor izabrana lokacija, do rešenja u kome su sva rešenja izabrane lokacije. Nakon toga bi se iz skupa svih mogućih izdvojila rešenja koja su dopustiva, odnosno rešenja koja zadovoljavaju uslov da su izabrane lokacije-čvorovi na međusobnom rastojanju manjem od dozvoljenog. Za svako od tih rešenja izračunavala bi se funkcija cilja i kao najbolje, optimalno, proglašeno bi bilo ono za koje funkcija cilja dostiže maksimum.

Obim računanja i u slučaju lokacijskog problema nepokrivanja eksponencijalno raste sa porastom broja potencijalnih lokacija pa se i ovom slučaju pribegava korišćenju raznih heuristika za dobijanje rešenja u slučaju većih mreža. U nastavku biće prikazane dve greedy heuristike za rešavanje ACLP-a.

Ove heuristike konstruišu rešenje tako što na bazi ustanovljenih kriterijuma (grabljivih pravila) vrednuju potencijalne lokacije i u svakoj iteraciji biraju po jednu od njih koju "uključuju" u rešenje (promenljiva koja odgovara toj lokaciji, čvoru na mreži, u vektoru rešenja uzima vrednost 1), a iz rešenja "isključuju" one potencijalne lokacije koje su tim izborom diskreditovane (promenljive koje odgovaraju odbačenim lokacijama-čvorovima u vektoru rešenja uzimaju vrednost 0). Algoritmi za obe heuristike završava se onda kada više nije preostala nijedna potencijalna lokacija koja se može "uključiti" u rešenje ili iz njega "isključiti".

Naime osnovna ideja je da se za svaki čvor ustanovi koliko (otežanih) čvorova on pokriva (na udaljenosti su manjoj ili jednakoj od dozvoljene u odnosu na njega), odnosno ne pokriva (na udaljenosti su većoj od dozvoljene u odnosu na njega). Na osnovu ova dva pokazatelja ustanovljeni su kriterijumi α i β.

Notacija koja će se koristiti u definisanju ovih kriterijuma i ostalih elemenata algoritamskog prikaza heuristika, sledi.

Neka je $\Omega^* \subseteq N$ skup svih čvorova "uključenih" u rešenje, $\Omega_t^* \subseteq \Omega^*$ skup čvorova "uključenih" u rešenje u t-toj iteraciji, $\Psi \subseteq N$ skup svih čvorova "isključenih" iz rešenja, $\Psi_t \subseteq N$ skup čvorova "isključenih" iz rešenja u t-toj iteraciji i $A_t \subseteq N$ skup "aktivnih" čvorova u t-toj iteraciji, odnosno čvorova koji su preostali da u narednoj iteraciji budu vrednovani. Takođe važi, $N = \Omega_t^* \cup \Psi_t \cup A_t$ i $\Omega_t^* \cap \Psi_t \cap A_t = \varnothing$.

Neka je $\pi(i)$ podskup svih onih čvorova $j \in A_t$ koji su od čvora $i \in A_t$ udaljeni manje od dozvoljene udaljenosti ($d_{ij} \leq R$), uključujući i čvor $i \in A_t$. Dakle:

$$\pi(i) = \left\{ j \mid d_{ij} \leq R,\ j \in A_t \right\}$$

Vrednovanje svakog čvora $i \in A_t$ vrši se na osnovu kriterijuma koji su definisani na sledeći način:

$$\alpha(i) = v_i - \sum_{j \in \{\pi(i) \setminus i\}} v_j$$

$$\beta(i) = v_i + \sum_{j \in \{A_t \setminus \pi(i)\}} v_j$$

Kriterijum $\alpha(i)$ predstavlja “korist“ koja bi se ostvarila izborom čvora $i \in A_t$, odnosno njegovim “uključenjem“ u rešenje, a čija se vrednost izražava kroz razliku težinskog koeficijenta tog čvora i sume težinskih koeficijenata svih onih čvorova koje bi ovaj izbor “isključio“ iz rešenja, odnosno koji su na rastojanju manjem od dozvoljenog u odnosu na njega.

Kriterijum $\beta(i)$ predstavlja takođe “korist“ koja bi se ostvarila izborom čvora $i \in A_t$, odnosno njegovim “uključenjem“ u rešenje, ali čija se vrednost izražava kroz sumu težinskog koeficijenta tog čvora i težinskih koeficijenata svih onih čvorova koje ovaj izbor ne bi “isključio“ iz rešenja, odnosno koji su na rastojanju većem ili jednakom dozvoljenom u odnosu na čvor $i \in A_t$.

Algoritam:

KORAK 1 Inicijalizacija $t = 1$

KORAK 2 Inicijalizacija $\Omega_t^* = \varnothing$, $\Psi_t = \varnothing$, $A_t = N$

KORAK 3 Za svaki čvor $i \in A_t$ odrediti skup $\pi(i)$

KORAK 4 Za svaki čvor $i \in A_t$ izračunati vrednosti kriterijuma: $\alpha(i)$, odnosno $\beta(i)$

KORAK 5 Odrediti čvor i^* za koji važi: $\alpha(i^*) = \max\limits_{i \in A_t} [\alpha(i)]$, odnosno $\beta(i^*) = \max\limits_{i \in A_t} [\beta(i)]$ Ako dva ili više čvorova imaju istu maksimalnu vrednost: $\alpha(i)$ odnosni $\beta(i)$, čvor i^* izabrati proizvoljno.

KORAK 6 Postaviti $t = t + 1$

KORAK 7 Ažurirati skup Ω_t^*: $\Omega_t^* = \Omega_{t-1}^* \cup i^*$

KORAK 8 Ažurirati skup Ψ_t: $\Psi_t = \Psi_{t-1} \cup \{j \mid j \in \pi(i^*) \backslash i^*\}$

KORAK 9 Ažurirati skup A_t: $A_t = A_{t-1} \backslash \{\Psi_t \cup i^*\}$

KORAK 10 Ako je $A_t \neq \varnothing$, vratiti se na KORAK 3, u suprotnom preći na KORAK 11

KORAK 11 Usvojiti $\Omega^* = \Omega_t^*$, $\Psi = \Psi_t$

KORAK 12 Izračunati vrednost funkcije cilja $Z = \sum\limits_{i \in \Omega^*} v_i$

KORAK 13 Kraj algoritma.