POSEBNE METODE OPERACIONIH ISTRAŽIVANJA U LOGISTICI

UPRAVLJANJE ZALIHAMA

Predmetni profesor: **Doc. dr Dimitrijević Branka dipl. inž.**

Predmetni asistent: **Simić Vladimir dipl. inž.**

1. ZALIHE

Def 1. - Pod pojmom zaliha podrazumevamo različita materijalna sredstva, koja su određeno vreme isključena iz procesa proizvodnje ili prometa, sa ciljem da se kasnije kada se ukaže potreba iskoriste.

Def 2. - Zalihe su sve količine materijala, energije i informacija, koje su određeno vreme isključene iz procesa proizvodnje ili upotrebe (potrošnje), a sa ciljem da se u datom trenutku ukazane potrebe mogu iskoristiti.

Def 3. - U širem smislu, pod zalihama se podrazumevaju mašine, rezervni delovi, instrumenti, opslužujući personal, transportna sredstva, lekovi, životne namirnice, municija, oružje, i dr.

Zalihe, ovako definisane, srećemo svuda. Nema ni jedne ljudske delatnosti u kojoj ne postoji potreba za formiranjem i korišćenjem zaliha.

Uglavnom se zalihe, sa kojima se srećemo svakodnevno, mogu podeliti na *tržišne* i *proizvodne*. Tržišne zalihe treba da zadovolje potražnju kupaca. Proizvodne zalihe moraju da obezbede nesmetanu proizvodnju, a to su pre svega zalihe sirovina, repromaterijala i delova iz kooperacija.

Zalihe su toliko raznovrsne, kako po svom sadržaju, tako i po elementima i kriterijumima o kojima se mora voditi računa prilikom njihovog formiranja i korišćenja, tako da je polje njihovog proučavanja izizetno široko. Za svaku karakteristiku zaliha postoji čitav spektar mogućih situacija, raspoređenih među ekstremima. Nekada imamo zalihe kod kojih je moguće uticati samo na potrošnju, ali i suprotno, imamo zalihe kod kojih se može uticati samo na formiranje (potrošnju možemo samo utvrđivati ili predviđati).

Razlozi za formiranje zaliha su različiti. Zar možemo da budemo sigurni da će, na primer, potrebne količine sirovina stići u skladiste upravo u trenutku kada su za proizvodnju neophodne. Kada su u nekoj etapi procesa proizvodnje potrebni određeni delovi, a njih nema na skladistu, tada zbog deficita delova, proizvodnja može da se zadrži ili da se zaustavi. Ovakvi deficiti pojedinih delova u prizvodnji mogu da dovedu do jako velikih gubitaka. Katastrofalno je kada se u toku borbe zalihe municije iscrpe ili kada u avionu u toku leta nestane goriva. Očigledno je da u organizaciji proizvodnje treba preduzeti mere da do takvih situacija ne dođe. Fabrike na skladištu moraju da imaju dovoljnu količinu sirovina i delova od kooperanata, tako da se proces proizvodnje ne zaustavi. Ipak, ako na skladištu obezbedimo velike količine zaliha, bićemo prinuđeni da uložimo velika sredstva za nabavku i čuvanje. Zbog toga količine zaliha treba da budu optimalne.

Proučavanje zaliha je karakteristično, pored izuzetne raznovrsnosti problema, koji proističu u vezi sa njima, i po tome što rešenja koja se traže moraju da imaju i kvantitativni karakter, a ne samo kvalitativni.

Pitanja kao:

– koje i kolike zalihe su potrebne?
– kako ih formirati?
– kako ih pratiti i kontrolisati?
– kako ih u vremenu popunjavati?
– koji su faktori koji ih limitiraju i na koji način?

– i mnoga slična, pojavljuju se svakodnevno pred svima nama.

Da bi se do kraja shvatio značaj proučavanja i celishodnog upravljanja zalihama, dovoljno je napomenuti da je danas preko 30% ukupnih sredstava svetske privrede u zalihama.

Jasno je da formiranje visokih zaliha izizetno košta, a sa druge strane, jasno je da njihov nedostatak često može da zaustavi proizvodne cikluse, ruši čitave sisteme i pruzrokuje često nenadoknadive štete. Čovek pokušava da da prave odgovore u vezi sa problemima koji se tiču zaliha, upravo onoliko dugo koliko i sam postoji. Međutim, korišćenje matematičkih metoda za rešavanje problematike vezane za zalihe počinje tek početkom prošlog veka. Prve metode koje se odnose na optimizaciju potrebnog nivoa zaliha napravio je Ford Harris 1915. godine. Od tog vremena na ovoj formuli, koja je kasnije nazvana formulom Wilsona (jer je istu Wilson razradio u svom predlogu za upravljanje zalihama u 1934. godini), radio je veliki broj naučnika. No, i pored činjenice da se veliki broj naučnika toga doba bavio problematikom upravljanja zaliha, značajnijih napredaka nije bilo, a sve do drugog svetskog rata predmet proučavanja su bile zalihe koje imaju determinističku potrošnju. Drugi svetski rat i pojava kibernetike i operacionih istraživanja, predstavljaju prekretnicu na planu istraživanja pitanja vezanih za zalihe. Za vreme rata, razrađen je prvi model zaliha sa stohastičkom potrošnjom u jednom periodu, nazvan ’’problem novogodišnje jelke’’. Posle rata pojavljuju se i radovi za koje se može reći da predstavljaju osnove savremene teorije zaliha, koja u današnje vreme ima karakter naučne discipline. Takođe, u tom periodu se pojavila i prva knjiga potpuno posvećena zalihama, u kojoj se detaljno razrađuju modeli za upravljanje zalihama sa stohastičkom potrošnjom. Interesantno je i napomenuti da se korišćenje matematičkih metoda za upravljanje zalihama najpre pojavilo u industriji i da su se njima više bavili inženjeri nego ekonomisti.

Moderne matematičke metode za razne sličajeve, a uz razne kriterijume optimizacije, mogu se koristiti za određivanje pravila po kojima će se upravljati zalihama. Kod rešavanja ovih zadataka, potrebno je da poznajemo i da definišemo veći broj elemenata, a potom u zavisnosti od konkretnog ponašanja svakog od njih, da napravimo matematičke modele, koji će moći da obuhvate i da na odgovarajući način tretiraju faktore koji su relevantni za krajnji uspeh upravljanja zalihama. Ovo je očigledno jedan i više nego složen proces i kao takvog ga je vrlo teško predstaviti matematičkim modelom, koji će baš sve da obuhvati i to na adekvatan način. Iz tog razloga nama je jasno da su prvo potrebna odgovarajuća uprošćenja i približenja, a potom i određene korekcije u izlaznim rezultatima koje daje model (upravo zvog uvedenih aproksimacija).

Primena računara u procesu upravljanja zalihama daje jednu novu dimenziju pomenutoj problematici, a u isto vreme proširuje i mogućnosti u pogledu istraživačkog rada na konstrukciji i korišćenju novih modela. Upotrebom računara kod praktičnog upravljanja zalihama, na pravi način je rešen problem korišćenja velikog broja informacija u kratkom vremenu. To je omogućilo još dalje usavršavanje i razvijanje matematičkih metoda i modela iz ove oblasti.

Danas se na istraživanju zaliha radi više nego ikada ranije. Nosioci današnjeg istraživačkog rada problematike upravljanja zalihama su, pored univerzitetskih radnika, uglavnom i stručnjaci raznih profila, koji rade u najvećim svetskim kompanijama za proizvodnju elektronskih računarskih sistema. Međitim, može su uočiti, da i pored velikog istraživačkog rada, naročito sa stohastičkim modelima zaliha, uglavnom se ostalo u sferi ili samo stohastičke potrošnje, ili samo stohastičkog popunjavanja. Razlozi za ovo *verovatno* se nalaze u činjenici da su na ovom polju daleko najdalje otišle najrazvijenije zemlje sveta (SAD, EU i Japan), koje karakteriše i to da je poslovna disciplina u poštovanju ugovorenih termina isporuke, najveći broj zaliha učinila zalihama sa determinističkim popunjavanjem, a to je i uslovilo smanjen interes da se ovo pitanje reši do kraja.

1.1. ZALIHE U PROIZVODNJI I PROMETU

U proizvodnji i prometu, javljaju se brojna preduzeća sa velikim brojem različitih vrsta zaliha. Kod nekih preduzeća, problematika upravljanja zalihama je u drugom planu, dok je kod drugih ova problematika od primarne važnosti (navedena problematika je delatnost kojom se bave). Ako eliminišemo dva navedena ekstrema, uopšteno gledano, može se zaključiti da u najvećem broju slučajeva zalihe u proizvodnji i prometu predstavljaju jednu od najznačajnijih komponenti potrebnu za funkcionisanje.

Postoji ogroman broj razloga za formiranje zaliha u procesu proizvodnje i prometa i upravo u odnosu na razlog zbog kojeg su i formirane određuje se *mesto i uloga* u navedenim procesima. Upravo iz navedenog, možemo zaključiti značaj klasifikacije prema mestu koje zaliha zauzima i ulozi koju ona igra u procesima proizvodnje i prometa. Prema navedenom kriterijumu, zalihe klasifikujemo na:

– *Kalkulativne zalihe*, koje se formiraju zbog prednosti koje pruža proizvodnja (nabavka) u većim količinama (pre svega se misli na dobijanje određenih popusta pri kupovini u većim količinama).
– *Zaštitne zalihe*, koje se formiraju zbog nesigurne potrošnje i proizvodnje, a sve sa ciljem da se obezbedi kontinuitet proizvodnje i prometa, bez obzira na ovu nesigurnost.
– *Anticipativne zalihe*, koje se formiraju tako da budu u korelaciji sa periodičnim promenama ponude i potražnje.
– *Špekulativne zalihe*, koje se formiraju sa ciljem da se ostvari dodatna dobit očekivanim promenama na tržištu (promene cena, spoljnotrgovinskog režima, poreske politike, itd.).

Ovakvu podelu prihvatamo kao jako grubu, jer se u praksi često dešava da imamo zalihe koje istovremeno mogu da pripadaju dvema od navedenih vrsta, kao i da prelaze vremenom iz jedne u drugu vrstu, itd.

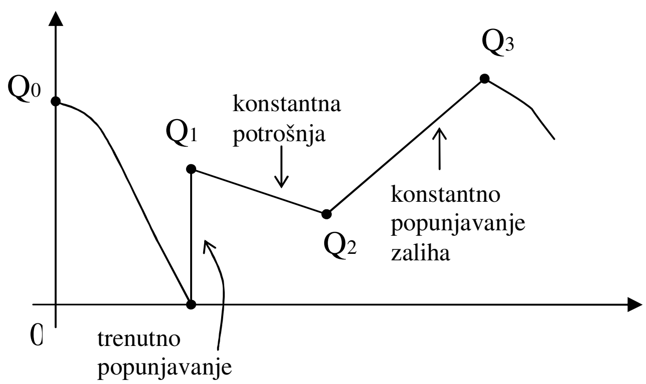
2. UPRAVLJANJE ZALIHAMA

Upravljanje je održavanje jednog sistema, ili dela sistema, uprkos raznim poremećajima u željenom stanju, ili pak njegovo prevođenje u neko drugo željeno stanje.

Zadatak upravljanja zalihama se može u opštem slučaju formulisati na sledeći način ⇨ Poznati su troškovi čuvanja zaliha i poznato je kako se troše zalihe, a potrebno je odrediti vreme popune zaliha i količinu kojom se popunjavaju. Ova količina za popunu zaliha je optimalna, ako se određuje iz uslova da ukupni troškovi nabavke i čuvanja zaliha budu minimalni.

Pri rešavanju ovog zadatka najčešće polazimo od sledećih *pretpostavki i ograničenja*:

– troškovi se sastoje od troškova nabavke i dostave artikala do skladišta, od troškova čuvanja zaliha na skladištu, kao i troškova nastalih nedostatkom zaliha, ako se takva mogućnost dopušta;
– popunjavanje zaliha izvodi se trenutno ili tokom vremena;
– potraživanje (potrošnja) zaliha može da bude deterministička (konstantna na jednakim vremenskim intervalima ili po određenom zakonu) ili stohastička (slučajna, tada se statističkom analizom ocenjuje njena raspodela verovatnoća).



Slika 1: *Moguće izmene nivoa zaliha.*

Iskustvo u formiranju zaliha je dugo, ali korišćenje matematičkih modela je vezano tek za početak prethodnog veka. Prvi matematički model, iz koga se dobija optimalna količina zaliha je dao američki naučnik Ford Harris. Osnovna pretpostavka u Harisovom modelu je da se zalihe troše *konstantn*o i ona se zadržala u svim uopštenjima ovog modela do drugog svetskog rata, a onda su zahvaljujući pojavi i razvoju operacionih istraživanja, razvijeni modeli sa stohastičkom potražnjom zaliha.

Jedno je sigurno, a to je da univerzalnih modela nema. Za svaki tip zaliha su razvijeni posebni matematički modeli, koje u grubim crtama delimo na determinističke i stohastičke (pomenuti Harisov model upravljanja zalihama je deterministički model).

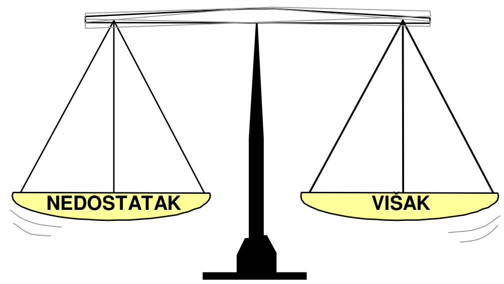
Upravljanje zalihama ima za cilj iznalaženje rešenja na *dva problema:*

1. Problem određivanja optimalnog (željenog) stanja zaliha u zavisnosti od relevantnih faktora.

2. Problem održavanja nivoa zaliha što je moguće bližim željenom.

2.1. KONCEPT UPRAVLJANJA ZALIHAMA

Upravljanje zalihama treba posmatrati kao proces dostizanja balansa izmedju nedostatka i viška zaliha



Zadatak upravljanja zalihama sastoji se iz formulisanja strategije i upravljanja u kontekstu ciklusa popune.

- ***Strategije upravljanja zalihama*** sastoje se iz pravila koja se odnose na definisanje onoga šta naručiti ili proizvesti, kada preduzeti određene akcije, i u kojoj količini naručiti ili proizvesti.
- Proces upravljanja zalihama je procedura koja podrazumeva primenu odgovarajuće strategije.
- Odgovor na dva osnovna pitanja:
  - ***Kada*** proizvesti – nabaviti, odnosno koliko često ?
  - ***Koliko*** ?

  može biti dat na više načina, primenom različitih pristupa
- U osnovi može se govoriti o tri osnovna pristupa:
  - **Pristup baziran na troškovima**
  - **Pristup baziran na planiranju zahteva**
  - **Pristup baziran na vremenu**

  Pri tome, respektovanje troškova ne isključuje se u dva poslednja pristupa.
- Prisutne su dve generalne koncepcije:
  - PULL – Alociranje količina po skladištima.
  - PUSH – Popuna količina zahtevanih od strane svakog skladišta
- U tradicionalnom pristupu upravljanju zalihama pretpostavlja se da su poznati ***nivo zahteva*** i njihova varijabilnost, ***vreme isporuke*** i njegova varijabilnost, kao i ***troškovi***. Na donosiocu odluke je da čini najbolje što može shodno zadatim uslovima. Nasuprot tome ***just-in-time filosofija*** ima za cilj ***da eliminiše zalihe*** smanjenjem varijabilnosti zahteva i vremena isporuke, smanjivanjem količine u

jednoj narudžbi, i osiguranjem kvaliteta isporučene robe i pouzdanosti same narudžbe.

- Otuda, uvek je neophodno obezbediti
  - Raspoloživost proizvoda u đeljenom trenutku i zahtevanoj količini, i
  - Minimalne troškove

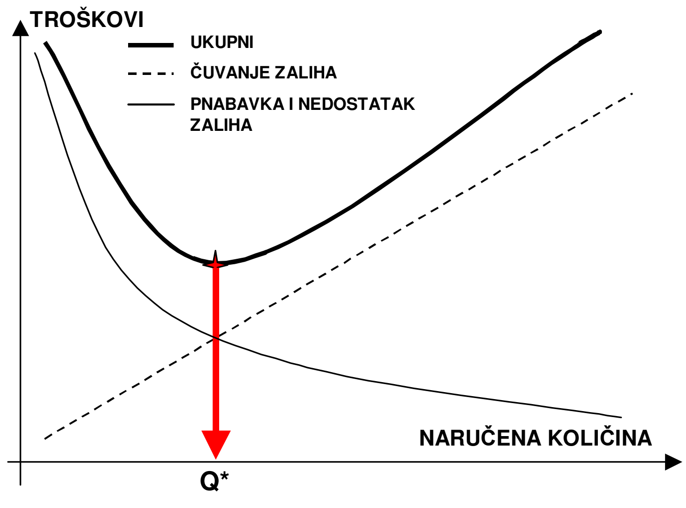
  Shodno tome, navedene kategorije predstavljaju ***ciljeva upravljanja zalihama***

- Raspoloživost nekog proizvoda u datom trenutku posmatra se često i kao mera servis stepena

$$\text{Servis stepen} = 1 - \frac{\text{Nedostajuća količina na zalihama (godišnje)}}{\text{Ukupna zahtevana količina (godišnje)}}$$

2.2. TROŠKOVI ZALIHA

- Različiti autori na različit način definišu relevantne troškovne kategorije, ali u osnovi je reč o tri osnovne kategorije koje mogu biti razdvojene u dve konfliktne grupe:
  - ***Troškovi nabavke*** (naručivanja, obrada, manipulacija, transport, ,..)
  - ***Troškovi čuvanja zaliha*** (troškovi skladištenja, investicioni, osiguranje i porezi, rizik: oštećenja, gubljenja kvaliteta, zaštite i pakovanja,…)
  - ***Troškovi nedostatka zaliha*** (izgubljena prodaja, hitna narudžba, čekanje korisnika)

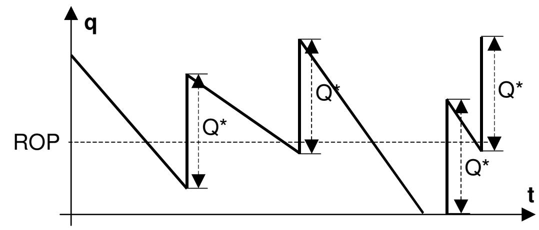


Slika 2: *Troškovi zaliha.*

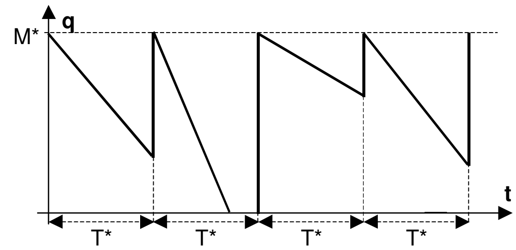
3. MODELI UPRAVLJANJA ZALIHAMA

Prisutan je ogroman broj modela. Ta činjenica posledica je veoma velikog broja problema i ciljeva koji se postavljaju, mnogobrojnih tehnika koje se koriste, ali i duge tradicije, s obzirom da je reč o prvoj oblasti primene operacionih istraživanja – klasični EOQ model, tzv. Harisov model potiče iz 1913 god.

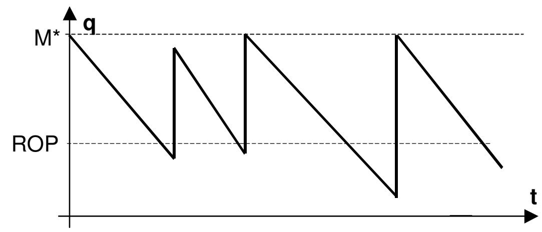
- Klasifikacija:
  - *Period*
    - ✓ ***Jednokratno naručivanje*** (statički modeli) – proizvodi se naručuju ili proizvode samo jednom (sezonska roba, seme, modni proizvodi, novine, jelke…)
    - ✓ ***Višestruko naručivanje (dinamički modeli)*** – roba koja se periodično naručuje
  - *Karakter tražnje*
    - ✓ ***Deterministički***
      - konstantna
      - promenljiva
    - ✓ ***Stohastički***
      - diskretni
      - kontinualni
  - *Karakter isporuke*
    - ✓ ***Fiksno vreme isporuke***
    - ✓ ***Neizvesno vreme isporuke***
    - ✓ ***Nulto vreme isporuke***
  - *Broj proizvoda kojima se upravlja*
    - ✓ ***Jedan***
    - ✓ ***Više***
  - *Nivoi čuvanja zaliha*
    - ✓ ***Jedan ešalon***
    - ✓ ***Više ešalonski***
  - *Upravljačke promenljive* (control strategies or policies)
    - ✓ *Optimal order quantity (Q*), reorder point quantity (ROP)* ***[Q*, ROP]***



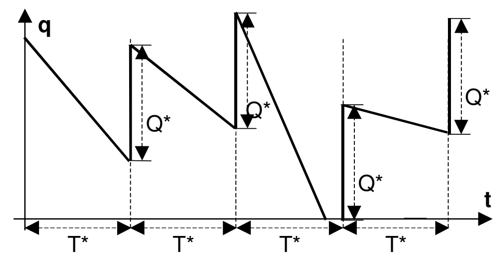
✓ *Optimal order interval (T*), optimal max. level (M*)* ***[T*, M*]***



✓ *Reorder point quantity (ROP), optimum max. level (M*)* ***[ROP, M*]***



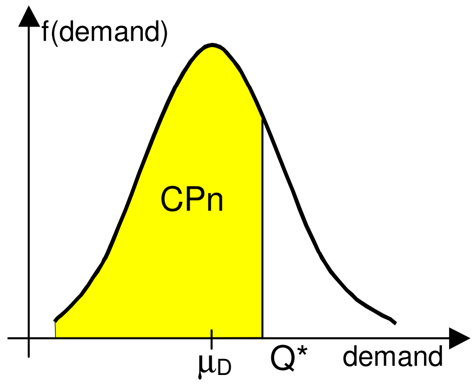
✓ *Optimal order interval (T*), optimal order quantity (Q*)* ***[T*,Q*]***



- *KArakter troškova*
  - ✓ ***Fiksni***
  - ✓ ***Vaijabilni***
- *Dodatni zahtevi*
  - ✓ Ograničene investicije
  - ✓ Zbirne narudžbe
  - ✓ Ograničeno vreme isporuke
  - ✓ …
- *Primenjena filosofija*
  - ✓ ***Troškovni modeli***
  - ✓ ***Planiranje zahteva***
  - ✓ ***Just-in-time***

➢ Troškovno orijentisani modeli ("tradicionalni modeli upravljanja zalihama")

- *Basic single order quantity model* (cilj je maksimizacija profita za poznatu stohastičku tražnju i poznate troškove po jedinici)



CPn cumulative frequency of selling at least n units
SP selling price
CP costs per unit
μ_D demand mean value
σ_D standard deviation of demand

$$CPn = \frac{SP - CP}{(SP - CP) + CP} \qquad Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$Q^* = \mu_D + z(CPn) \cdot \sigma_D$$

- *Basic repetitive order quantity model* (EOQ - Harris model)
- *Reorder point model with uncertain demand* (Q^*, ROP)
- *Periodic review models with uncertain demand* (T^*, M^*)

3.1. AGREGIRANO UPRAVLJANJE ZALIHAMA

Iako upravljanje zalihama znači upravljanje svakim proizvodom pojedinačno, takav pristup je neefikasan i obično se upravlja samo "značajnim" zalihama.

Za određivanje ranga značajnosti koriste se različite tehnike.

Obrt

$$\textbf{Obrt} = \frac{\textbf{Prodaja (godišnja)}}{\textbf{Investicije u zalihe (god.)}}$$

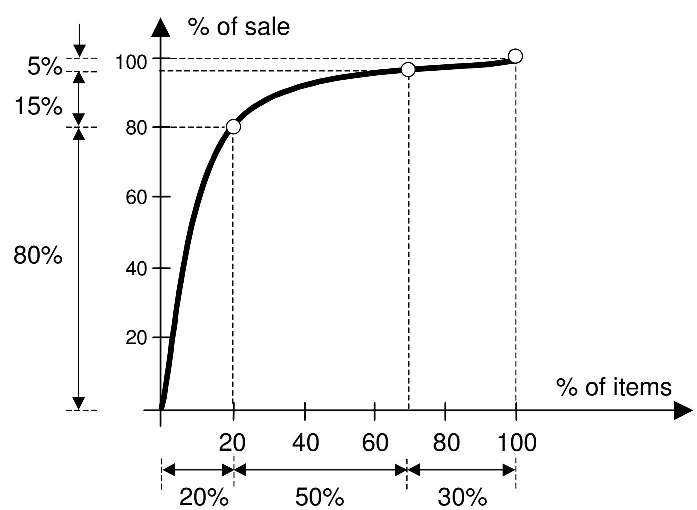
➢ Ovo je možda najpopularnija tehnika, a na bazi ovog odnosa definišu se robe najznačajnije za upravljanje

➢ ***ABC analiza***

➢ ABC analiza pripisuje se Vilfredu Paretu (1848-1923) poznatom italijanskom ekonomisti i sociologu rođenom u Francuskoj.

➢ Pareto, edukovan kao inžinjer, akasnije kao ekonomist, sociolog i politikolog, uočio je da ***mnogim situacijama dominira relativno mali broj uticajnih faktora***.

➢ Taj princip poznat kao "pravilo **80-20**", koje kazuje da se oko ***80% karakteristika populacije iskazuje na 20% članova***. Ovi procenti nisu striktni već je to orijentaciona vrednost.

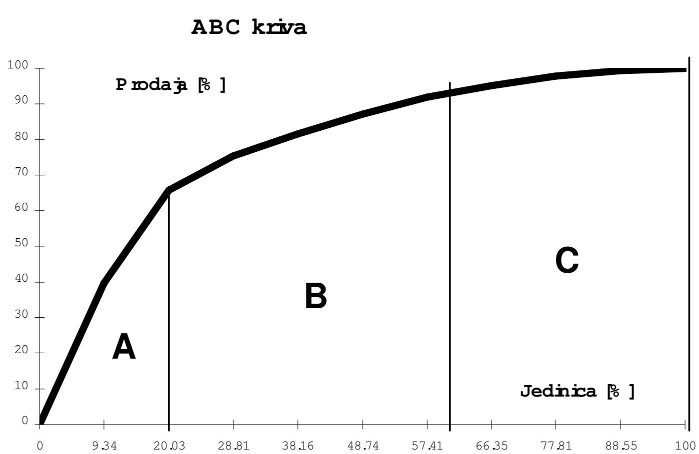


➢ Primena ABC analize u

klasifikaciji roba relevantnih za upravljanje zalihama podrazumeva obično poznavanje prodaje u nekom intervalu i količina pojedinih jedinica.

ABC – PRIMER KLASIFIKACIJE

Oznaka	Rang (prema prodaji)	Prodaja (10^6 Din)	Kumulativni procenat prodaje [%]	Broj komada	Kumulativni broj komada [%]	ABC klasifikacija
XYZ	1	614	39.70	7434	9.34	**A**
AAB	2	431	65.76	8496	20.03	
		1045		**15930**		
QTR	3	121	75.38	6988	28.81	**B**
YTV	4	96	81.60	7442	38.16	
FTH	5	87	87.22	8412	48.74	
GDR	6	72	91.87	6907	57.41	
AMP	7	51	95.17	7114	66.35	
		427		**36863**		
TYN	8	40	97.74	9120	77.81	**C**
NNS	9	24	99.29	8547	88.55	
WZI	10	11	100.00	9117	100.00	
		75		**26784**		
		1547		**79577**		



3.2. MATEMATIČKI MODELI KOJIMA SE ODREĐUJE ŽELJENO STANJE ZALIHA

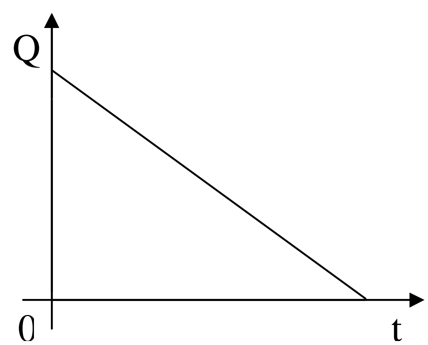
3.2.1. HARISOV MODEL UPRAVLJANJA ZALIHAMA

Nabavkom veće količine određenog artikla smanjuje se broj nabavki u vremenskom periodu koji se posmatra, a time se smanjuju i određeni troškovi (transportni i administrativni). Međutim, nabavkom većih količina podiže se i srednji nivo zaliha, što ima za posledicu rast nekih drugih troškova (skladištenja i vezanih sredstava). Imajući ovo u vidu, logično je očekivati da postoji optimalna veličina nabavke za koju će ukupni troškovi biti minimalni.

Prvi je postavljeni zadatak pokušao da reši Haris, svojim modelom, koji je zasnovan na sledećim pretpostavkama:

1. Potražnja artikla sa zaliha u toku vremenskog perioda **T** je konstantna i iznosi **Q** komada.
2. Popuna zaliha na skladištu je trenutna.
3. Ne dopušta se nedostatak zaliha.
4. Troškovi nabavke su poznati i iznose **N** novčanih jedinica.
5. Troškovi jedne jedinice zaliha u jedinici vremena su poznati i iznose **C** novčanih jedinica.

Ako bi se ukupna potrebna količina zaliha od **Q** jedinica naručila na početku posmatranog perioda trošenja tih zaliha, onda grafik zavisnosti promene nivoa zaliha u vremenu ima oblika kao na Slici 3.



Slika 3: *Harisov model - promena nivoa zaliha pri samo jednom naručivanju.*

Troškovi naručivanja, smeštaja i čuvanja zaliha, kada se naručuje na početku perioda trošenja (kada se u toku perioda **T** realizuje samo jedno naručivanje), su:

$$Z_1 = N + C\frac{Q}{2}T. \tag{1}$$

Međutim, ako celokupnu količinu zaliha od **Q** komada traženu za period **T** naručimo **n** puta, pri čemu se naručuje po **q** komada:

$$n \cdot q = Q, \quad n = \frac{Q}{q} \tag{2}$$

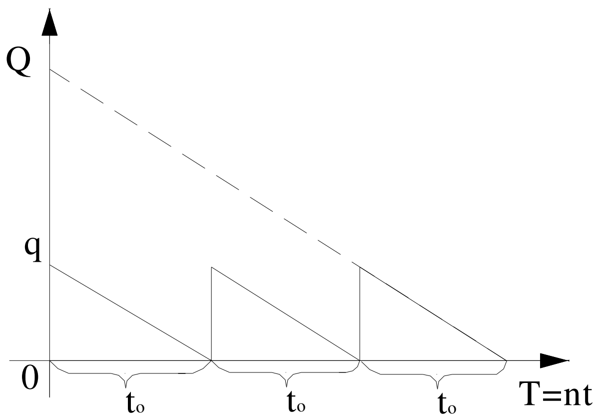
Ako sa $\mathbf{t}_0$ obeležimo vreme za koje se potroše zalihe obima **q**, onda je:

$$n \cdot t_0 = T, \quad t_0 = \frac{T}{n}. \tag{3}$$

Sada su ukupni troškovi nabavke i čuvanja zaliha:

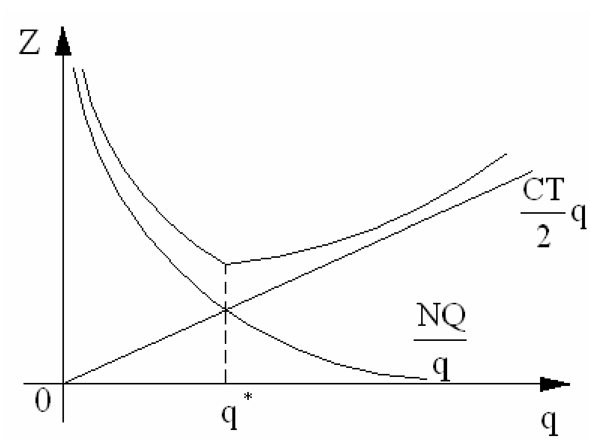
$$Z = \frac{NQ}{q} + \frac{CT}{2} q. \tag{4}$$

Grafik promene nivoa zaliha ima sledeći oblik:



Slika 4: *Harisov model - promena nivoa zaliha pri **n** naručivanja.*

Grafik funkcije **Z=Z(t)** prikazan je na Slici 5.



Slika 5: *Harisov model - grafik funkcije Z=Z(t).*

Iz potrebnog uslova minimuma funkcije **Z** ($\frac{dz}{dq} = 0$) sledi da je optimalna količina zaliha kojom se n puta popunjavaju zalihe za vreme **T**:

$$q = q^* = \sqrt{\frac{2NQ}{CT}}, \tag{5}$$

i predstavlja *formulu Wilsona*, a optimalan broj naručivanja je:

$$n = n^* = \frac{Q}{q^*}, \tag{6}$$

dok je optimalno vreme između dve popune zaliha:

$$t_0 = t_0^* = \frac{T}{n^*}. \tag{7}$$

I najpovršnija analiza predpostavki, uz koje je izvršeno modeliranje Harisonovog problema zaliha ukauzuje na ograničene mogućnosti njegove praktične primene. Pored toga što se njime u osnovi razmatra *deterministička* (odnosno konstantna) potrošnja, u praksi prisutna raznolikost ostalih tehnoekonomskih karakteristika uslovila je, a u cilju primenjivosti, njegovu dalju evoluciju.

3.2.2. MODEL ZALIHA SA STOHASTIČKOM POTROŠNJOM

U praksi potražnja zaliha nije uvek konstantna. U jednom intervalu vremena potražnja je veća, a u drugom je manja. U takvim slučajevima potrebno je znati raspodelu verovatnoća slučajne potrošnje **x** (tražnja je diskretna slučajna promenljiva), odnosno gustinu raspodele verovatnoća slučajne potrošnje **x** (tražnja je neprekidna slučajna promenljiva.

Osnovni parametri modela su:

x → potražnja (slučajna promenljiva),

y → nivo zaliha na skladištu,

c → troškovi nabavke zaliha (zavise od količine),

$\mathbf{c}_1$ → troškovi čuvanja jedinice zaliha u posmatranom periodu,

$\mathbf{c}_2$ → troškovi koji nastaju zbog nedostatka posmatranog artikla na zalihama.

3.2.2.1. TRAŽNJA **X** JE NEPREKIDNA SLUČAJNA PROMENLJIVA

Ako je tražnja **x** neke vrste zaliha neprekidna slučajna promenljiva, definisana gustinom gustinom raspodele verovatnoća **f(x)** i funkcijom raspodele **F(x)** i ako je **y** nivo zaliha na skladištu, tada se za **y > x** javljaju jedinični troškovi (čuvanja jedinice zaliha) $\mathbf{c}_1$, a ako je **y < x** (slučaj nedostatka zaliha), tada se javljaju jedinični troškovi $\mathbf{c}_2$.

Ako sa **Z(y)** označimo funkciju troškova za nivo zaliha **y**, onda je:

$$Z(y) = \underbrace{c \cdot y}_{\substack{\text{troškovi}\\ \text{nabavke}\\ \text{zaliha}}} + \underbrace{c_1 \int_0^y (y - x) \cdot f(x) dx}_{\substack{\text{očekivani troškovi}\\ \text{čuvanja zaliha}}} + \underbrace{c_2 \int_y^\infty (x - y) \cdot f(x) dx}_{\substack{\text{očekivani troškovi}\\ \text{nedostatka zaliha}}}. \tag{8}$$

Da bi se odredio nivo zaliha **y** za koji funkcija **Z(y)** dostiže minimum, potrebno je naći izvod ove funkcije po promenljivoj **y** i izjednačiti ga sa nulom:

$$\frac{dZ(y)}{dy} = c + c_1\,F(y) - c_2\,[1 - F(y)] = 0, \tag{9}$$

odakle je:

$$F(y^*) = \frac{c_2 - c}{c_1 + c_2}, \tag{10}$$

pri čemu model ima smisla za $\mathbf{c_2 > c}$.

3.2.2.2. TRAŽNJA **X** JE DISKRETNA SLUČAJNA PROMENLJIVA

Ako je tražnja **x** neke vrste zaliha diskretna slučajna promenljiva, definisana raspodelom verovatnoća **p(x)** i ako je **y** nivo zaliha na skladištu, tada se za **y > x** javljaju jedinični troškovi (čuvanja jedinice zaliha) $\mathbf{c_1}$, a ako je **y < x** (slučaj nedostatka zaliha), javljaju se jedinični troškovi $\mathbf{c_2}$.

$$Z(y) = \underbrace{c \cdot y}_{\substack{\text{troškovi}\\ \text{nabavke}\\ \text{zaliha}}} + \underbrace{c_1 \sum_{x=0}^{y} (y - x)p(x)}_{\substack{\text{očekivani troškovi}\\ \text{čuvanja zaliha}}} + \underbrace{c_2 \sum_{x=y+1}^{\infty}(x - y)p(x)}_{\substack{\text{očekivani troškovi}\\ \text{nedostatka zaliha}}}. \tag{11}$$

Veličina **y*** obezbeđuje minimum funkcije **Z(y)** ako su zadovoljene nejednakosti:

$$Z(y) \le Z(y-1) \;\text{ i }\; Z(y) \le Z(y+1). \tag{12}$$

Formirajmo izraz za **Z(y+1)**:

$$Z(y+1) = c(y+1) + c_1 \sum_{x=0}^{y+1}(y+1-x)\,p(x) + c_2 \sum_{x=y+2}^{\infty}(x-y-1)\,p(x) =$$

$$= c(y+1) + c_1 \sum_{x=0}^{y}(y+1-x)\,p(x) + c_1\underbrace{[y+1-(y+1)]}_{0}p(y+1) +$$

$$+ c_2 \sum_{x=y+1}^{\infty}(x-y-1)\,p(x) - c_2\underbrace{(y+1-y-1)}_{0}\,p(y+1) =$$

$$= c(y+1) + c_1 \sum_{x=0}^{y}(y-x)\,p(x) + c_1 \sum_{x=0}^{y} p(x) +$$

$$+ c_2 \sum_{x=y+1}^{\infty}(x-y)\,p(x) - c_2 \sum_{x=y+1}^{\infty} p(x),$$

kako je:

$$\sum_{x=y+1}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} p(x) - \sum_{x=0}^{y} p(x) = 1 - \sum_{x=0}^{y} p(x),$$

prema formuli (11), imamo:

$$Z(y+1)=Z(y)+c+(c_1+c_2)\sum_{x=0}^{y}p(x)-c_2. \tag{13}$$

Formirajmo izraz za **Z(y-1)**:

$$Z(y-1)=c(y-1)+c_1\sum_{x=0}^{y-1}(y-1-x)p(x)+c_2\sum_{x=y}^{\infty}(x-y+1)p(x)=$$

$$=c(y-1)+c_1\sum_{x=0}^{y}(y-1-x)p(x)-c_1(y-1-y)\,p(y)+$$

$$+c_2\sum_{x=y+1}^{\infty}(x-y+1)\,p(x)+c_2(y-y+1)\,p(y)=$$

$$=c(y-1)+c_1\sum_{x=0}^{y}(y-x)p(x)-c_1\sum_{x=0}^{y}p(x)+$$

$$+c_2\sum_{x=y+1}^{\infty}(x-y)p(x)+c_2\sum_{x=y+1}^{\infty}p(x)+c_2\,p(y),$$

prema formuli (11), imamo:

$$Z(y-1)=Z(y)-c+(c_1+c_2)p(y)-c_1\sum_{x=0}^{y}p(x)+c_2[1-\sum_{x=0}^{y}p(x)]=$$

$$=Z(y)-c+c_2+(c_1+c_2)p(y)-(c_1+c_2)\sum_{x=0}^{y}p(x). \tag{14}$$

Zamenom vrednosti za **Z(y+1)** i **Z(y-1)** iz formula (13) i (14) u nejednakosti (12) dobijamo:

$$Z(y)\le Z(y)+c-c_2+(c_1+c_2)\sum_{x=0}^{y}p(y),$$

i

$$Z(y)\le Z(y)-c+c_2+(c_1+c_2)\,p(y)-(c_1+c_2)\sum_{x=0}^{y}p(y),$$

ili

$$\sum_{x=0}^{y}p(y)\ge\frac{c_2}{c_1+c_2}\ \text{ i }\ \sum_{x=0}^{y-1}p(y)\le\frac{c_2}{c_1+c_2},$$

sledi:

$$F(y^*-1)=\sum_{x=0}^{y-1}p(y)\le\frac{c_2}{c_1+c_2}\le\sum_{x=0}^{y}p(y)=F(y^*). \tag{15}$$