UNIVERZITET U BEOGRADU
SAOBRAĆAJNI FAKULTET

ELEKTROTEHNIKA

- ŠKOLSKA 2026/2027 -

3. MAGNETIZAM

– MAG. KOLA, INDUKTIVNOST, ENERGIJA –

AMPEROV ZAKON (UKUPNE STRUJE)

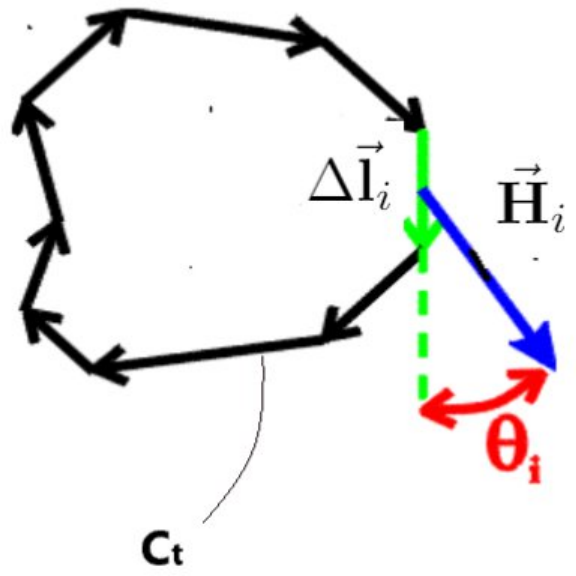
- Cirkulacija vektora jačine magnetnog polja *H* po zatvorenoj konturi C_t jednaka je ukupnoj struji koja koja prodire kroz površ naleglu na tu konturu.
- Pozitivan znak za struje uzima se po pravilu desne zavojnice.

$$\oint_{C_t} \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k} I_k$$

(*kroz povrs naleglu na Ct*)

$$\sum_{Ct} \vec{\mathbf{H}}_i \Delta\vec{\mathbf{l}}_i = \oint_{Ct} \vec{\mathbf{H}} d\vec{\mathbf{l}}$$

$$\left|\Delta\vec{\mathbf{l}}_i\right| \to 0$$



PRIMER PRIMENE AMPEROVOG ZAKONA

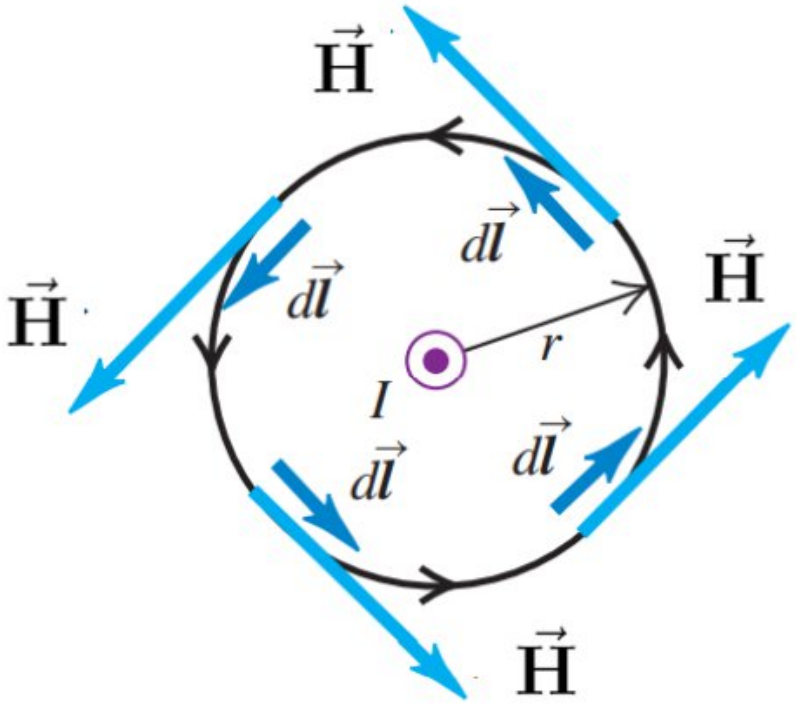
- Primenom Amperovog zakona, odrediti vektor jačine magnetnog polja ***H*** beskonačnog pravolinijskog provodnika. Zatim, odrediti odgovarajući vektor magnetne indukcije ***B***. Provodnik se nalazi u sredini relativne magnetne permeabilnosti μ_r.

$$\oint \vec{H}\cdot\vec{dl} = I$$

$$H\oint dl = I$$

$$H\cdot 2\pi r = I$$

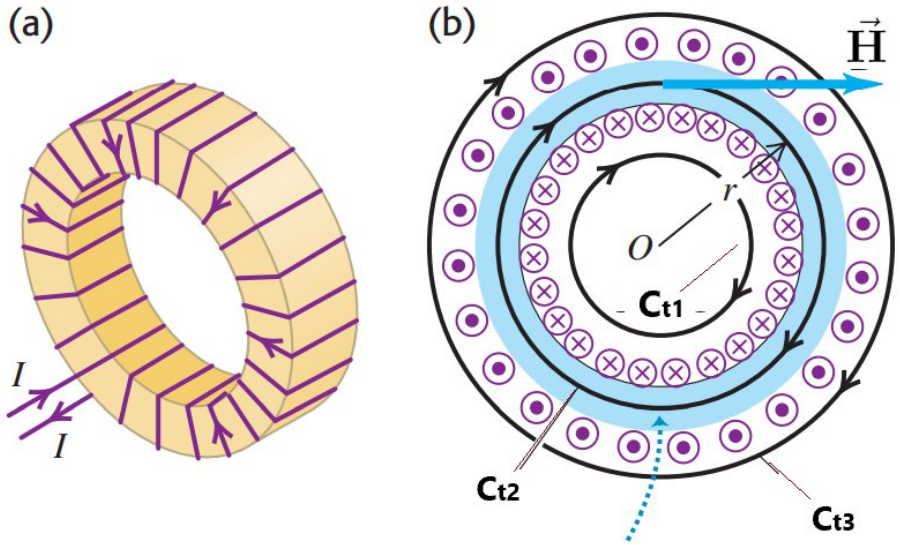
$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = \mu H = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

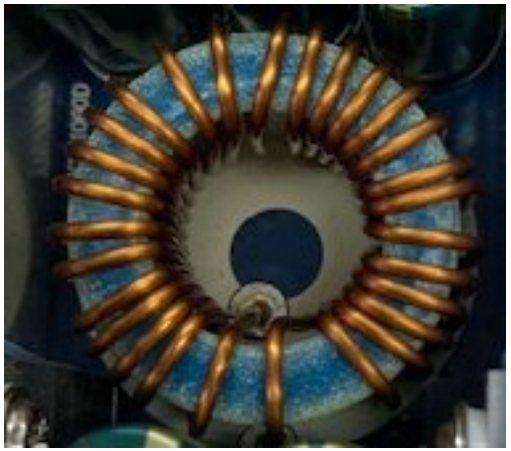


- Dobija se naravno isti rezultat kao i iz Bio-Savarovog zakona.

MAGNETNA KOLA

- Magnetno kolo je tipično torus od feromagnetnog materijala (jezgro) na koga je namotano ***N*** navojaka (namotaj) provodnika sa strujom ***I***.





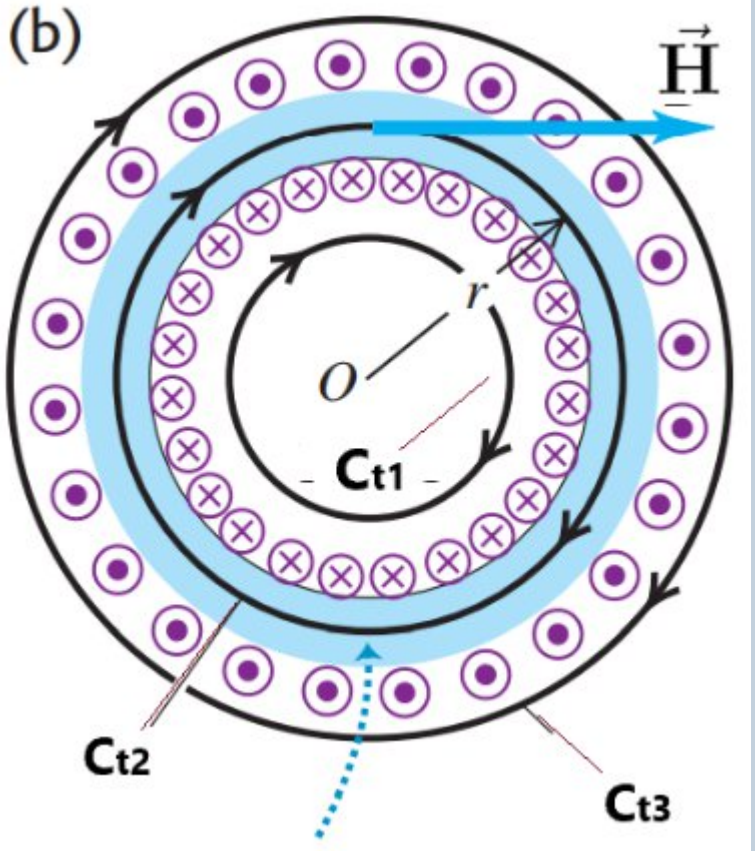
Magnetno polje postoji u plavo obojenoj zapremini prema Amperovom zakonu

MAGNETNA KOLA – AMPEROV ZAKON

- Primenom Amperovog zakona na konturu C_{t1} i C_{t3} dobija se da je intenzitet vektora jačine magnetnog polja jednak 0!
- Magnetno polje (u idealnom slučaju) postoji samo u feromagnetnom materijalu i prema Amperovom zakonu jačina polja za konturu C_{t2} je

$$H = \frac{NI}{2\pi r}$$

- Smer linija polja H u torusu i smer prolaska struje I kroz površ naslonjenu na C_{t2} povezan je desnom zavojnicom.



MAGNETNA KOLA – AMPEROV ZAKON

- U praksi se često razmatra približan račun kada je **jezgro tanko**.
- Poluprečnik ***r*** konture C_{t2} se malo menja, pa se uzima kontura koja prolazi kroz sredinu torusa (**srednja linija - *l***), a polje u celom torusu se smatra konstantnim po intenzitetu

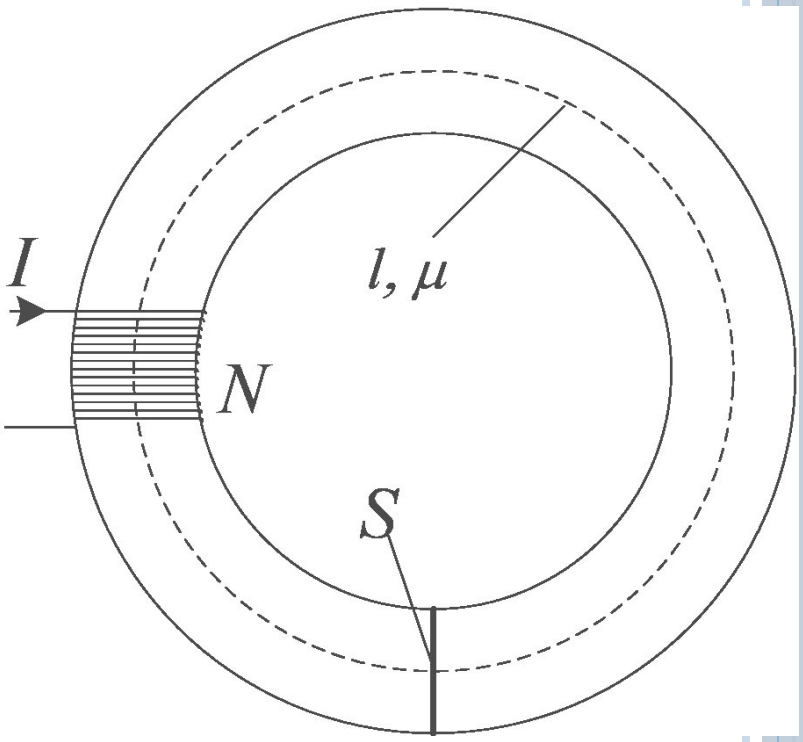
$$H = \frac{NI}{2\pi r} \approx \frac{NI}{l}$$

- Ako je torus od materijala sa permeabilnošću μ, tada je indukcija

$$B = \mu H = \frac{\mu NI}{l}$$

- A fluks kroz poprečni presek jezgra

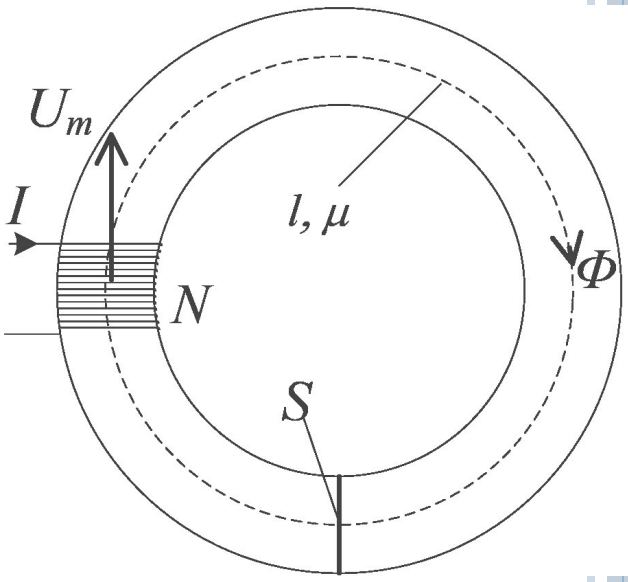
$$\Phi = \mathrm{BS} = \frac{\mu NIS}{l}$$



MAGNETNA KOLA – EKVIVALENTNO ELEKTRIČNO KOLO

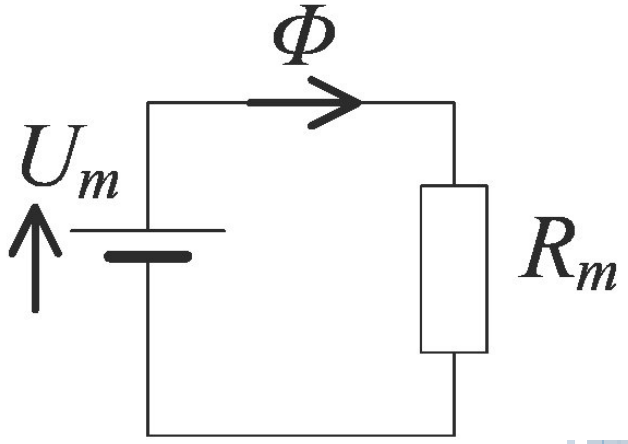
- Izraz za fluks polja kroz torusno jezgro može da se napiše u obliku

$$\Phi = \frac{NI}{\frac{l}{\mu S}} = \frac{U_m}{R_m}$$



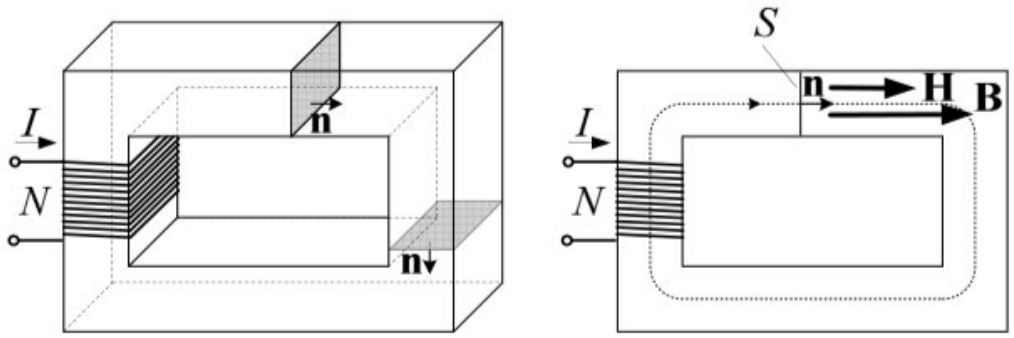
- $U_m = NI$ je **magnetopobudna sila**. U ekvivalentnom električnom kolu magnetopobudna sila se ponaša kao i elektromotorna sila sa istim smerim.
- $R_m = \frac{l}{\mu S}$ je **magnetna otpornost** ili **reluktansa**. U ekvivalentnom električnom kolu reluktansa se ponaša kao otpornik.
- $\boldsymbol{\Phi}$ je ekvivalentan struji, pa je

$$\Phi = U_m / R_m$$

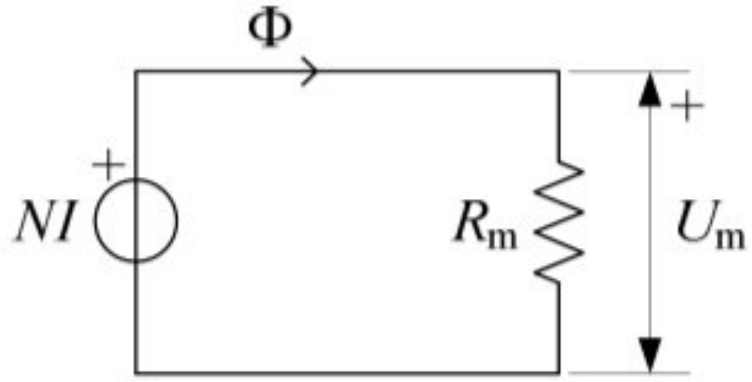


MAGNETNA KOLA – EKVIVALENTNO ELEKTRIČNO KOLO

- Magnetna jezgra često nisu torusnog oblika, već imaju oštre pravougaone oblike.
- U tom slučaju primenjuje se isti račun, koji važi samo **približno**.
- Najznačajnije odstupanje nastaje na ivicama jezgra gde se grane magnetnog kola "savijaju" pod pravim uglom.
- Kao i kod torusnih jezgara, koristi se ista ekvivalencija sa električnim kolima.



Magnetno kolo



Ekvivalentno električno kolo

SOPSTVENA INDUKTIVNOST

- Fluks namotaja Ψ od N navojaka je N puta veći od fluksa jezgra Φ

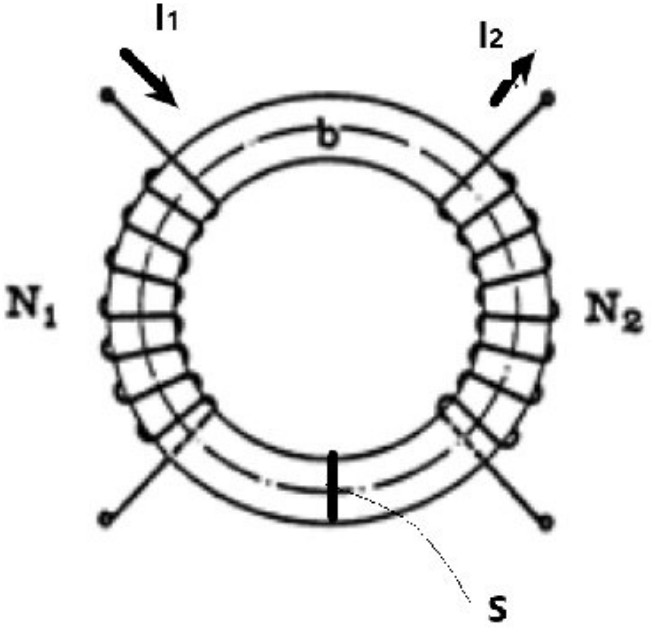
$$\Psi = N\Phi$$

- Sopstvena induktivnost prvog namotaja (meri se fluks prvog namotaja koji potiče od struje istog namotaja, pri I_2=0)

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{I_1} = \frac{N_1\Phi_1}{I_1} = \frac{N_1}{I_1}\cdot\frac{N_1 I_1}{R_m} = \frac{N_1^2}{R_m}$$

- Sopstvena induktivnost drugog namotaja (meri se fluks drugog namotaja koji potiče od struje istog namotaja, pri I_1=0)

$$L_2 = \frac{\Psi_{22}}{I_2} = \frac{N_2\Phi_2}{I_2} = \frac{N_2}{I_2}\cdot\frac{N_2 I_2}{R_m} = \frac{N_2^2}{R_m}$$



$$R_m = \frac{b}{\mu S}$$

MEĐUSOBNA INDUKTIVNOST

- Međusobna induktivnost dva namotaja (meri se fluks drugog namotaja koji potiče od struje prvog namotaja, pri I_2=0)

$$|L_{21}| = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{N_2\Phi_1}{I_1} = \frac{N_2}{I_1}\cdot\frac{N_1 I_1}{R_m} = \frac{N_1 N_2}{R_m}$$

- Ili obrnuto (meri se fluks prvog namotaja koji potiče od struje drugog namotaja, pri I_1=0)

$$|L_{12}| = \frac{\Psi_{12}}{I_2} = \frac{N_1\Phi_2}{I_2} = \frac{N_1}{I_2}\cdot\frac{N_2 I_2}{R_m} = \frac{N_1 N_2}{R_m}$$

- Očigledno zbog simetrije, mora da važi

$$|L_{12}| = |L_{21}|$$

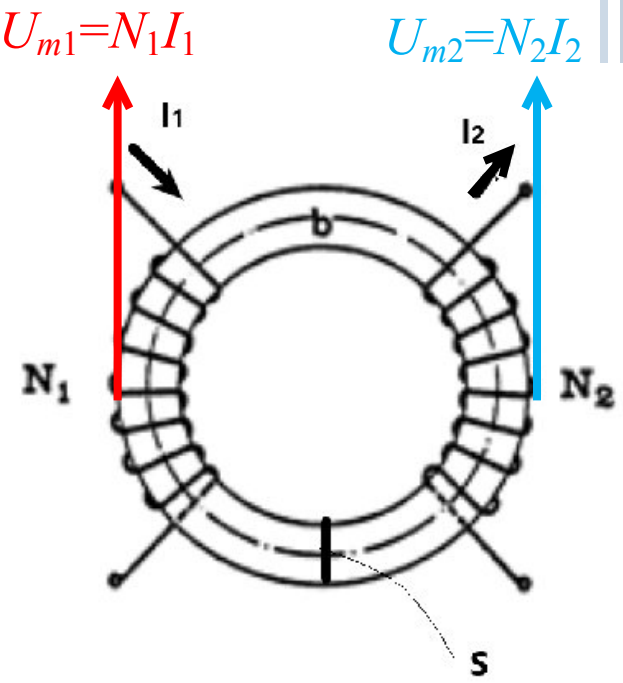
- Koeficijent sprege namotaja

$$k = \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{|L_{21}|}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$$

- Ukoliko je sprega dva kalema idealna k=1.

ZNAK MEĐUSOBNE INDUKTIVNOSTI

- Znak međusobne induktivnosti dva namotaja zavisi od usvojenih referentnih smerova struja kroz namotaje i načina motanja namotaja.
- Ako magnetopobudne sile imaju iste smerove međusobni fluks je pozitivan pa samim tim i međusobna induktivnost $\boldsymbol{L_{12/21}}$. U suprotnom, međusobna induktivnost je negativna.
- U slučaju sa slike desno $\boldsymbol{L_{12} < 0}$ jer su magnetopobudne sile $\boldsymbol{U_{m1}}$ i $\boldsymbol{U_{m2}}$ suprotno usmerene kroz jezgro.

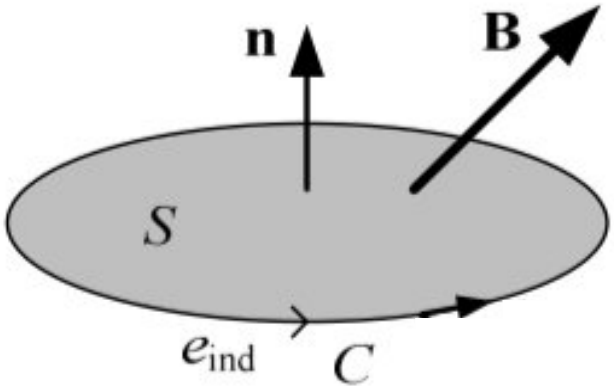


$$R_m = \frac{b}{\mu S}$$

ELEKTROMAGNETNA INDUKCIJA

- Faradejev zakon

$$e_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$$



- Indukovana ems ima smer konture koji je sa smerom normale na naleglu površ ***S*** vezan pravilom desne zavojnice, a fluks je

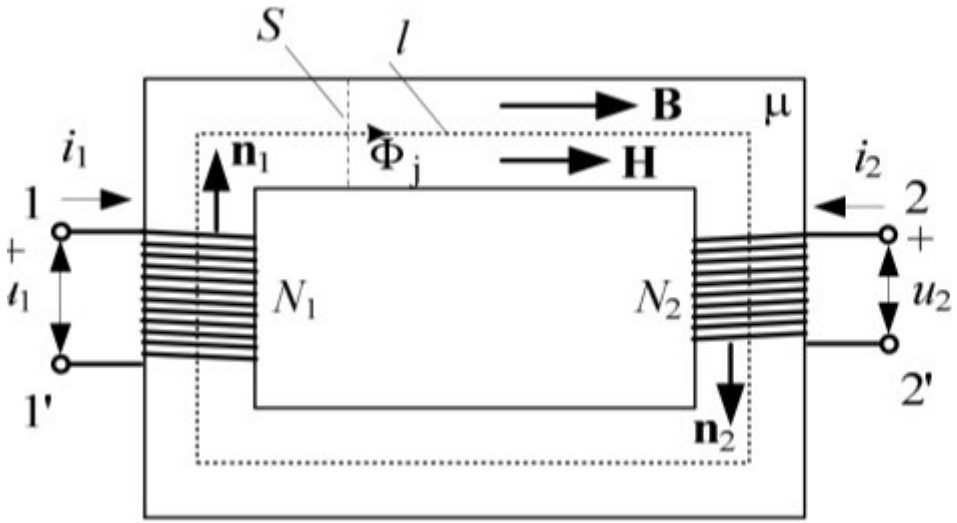
$$\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = \vec{B}\cdot S\cdot\vec{n}$$

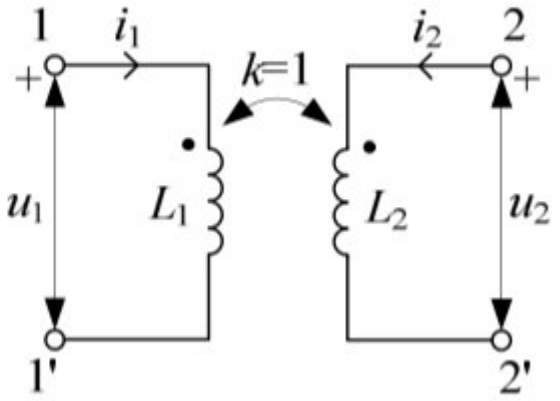
- Postoje dva (tri) tipa indukcije:
  - Statička – kada kontura stoji, a magnetno polje je promenljivo;
  - Dinamička – kada je polje konstantno (nepromenjivo) a kontura se kreće ili deformiše;
  - (Mešovita – koja obuhvata oba prethodna tj. kontura se kreće ili deformiše u promenljivom magnetnom polju.)

TRANSFORMATOR

- Koristi se za povećanje ili smanjenje napona i galvansko razdvajanje. Odnosom broja navojaka na primaru i sekundaru se kontroliše odnos napona. Transformator se sastoji od dva (ili više) jako spregnuta namotaja ($k \approx 1$) na zajedničkom jezgru.
- Ako je $k = 1$, napon primara je $u_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$ a napon sekundara je $u_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt}$, pa pošto je fluks isti u svakom delu jezgra, važi da je

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$





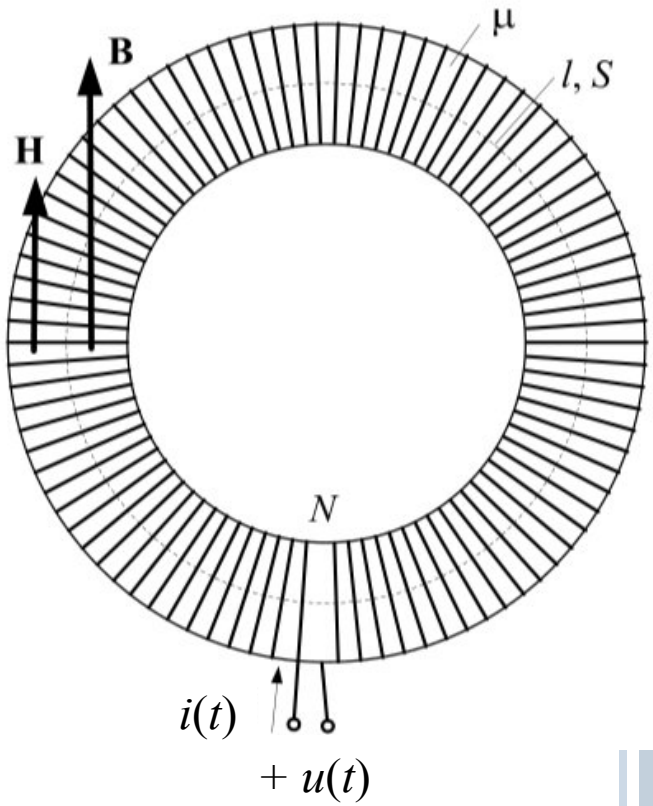
ENERGIJA MAGNETNOG POLJA KALEMA

- Za magnetno kolo sa slike važi

$$u(t) - Ri(t) - \frac{d\phi(t)}{dt} = 0$$

$$u(t) - Ri(t) - L\frac{di(t)}{dt} = 0$$

$$L = \frac{N^2}{R_m}, \quad R_m = \frac{l}{\mu S}$$



- Ako se pomnože obe strane jednačine sa $i(t)dt$ dobija se

$$u(t)\,i(t)dt - Ri^2(t)\,dt - Li(t)di(t) = 0$$

$$dW_{generatora} - dW_{gubitaka} - dW_{mag.\,polja} = 0$$

ENERGIJA MAGNETNOG POLJA KALEMA

- Elementarna energija koja se skladišti u kalemu je

$$dW_{mag.\,polja} = Li \cdot di$$

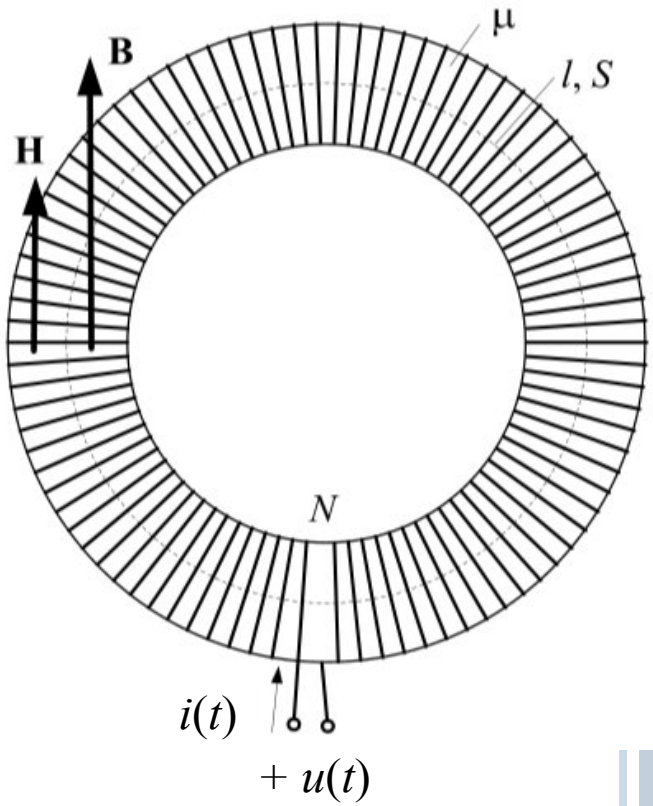
- Ukupna akumulirana energija u magnetnom polju kalema

$$W_{mag.\,polja} = \int_0^I Li \cdot di = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \phi I$$

$$W_{mag.\,polja} = \frac{1}{2} \Phi I = \frac{1}{2} BSHl = \frac{1}{2} BHV,$$

- gde je $V=Sl$ - zapremina torusa (približno).
- Zapreminska gustina magnetskog polja je

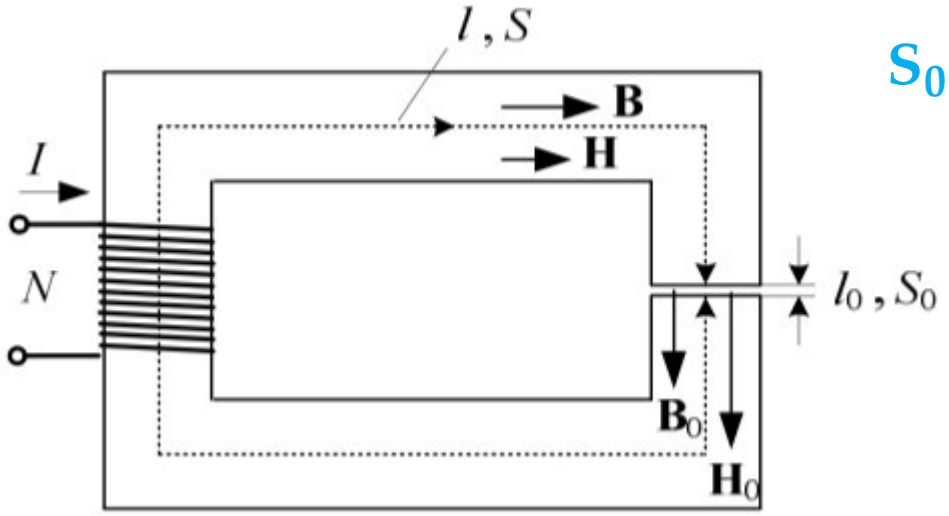
$$w_{mag.\,polja} = W_{mag.\,polja} / V = \frac{1}{2} BH$$



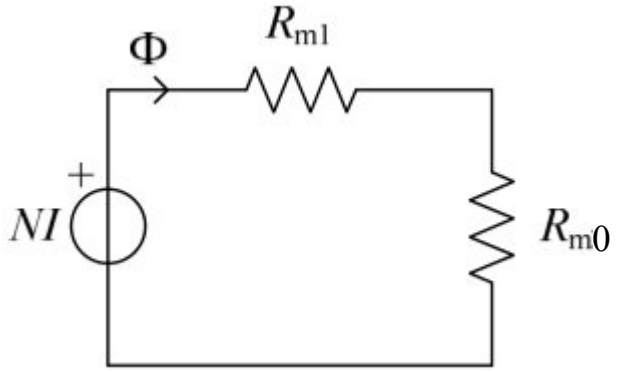
PRIMERI

- **Primer 2**. Nacrtati ekvivalentno električno kolo magnetnom kolu sa slike i odrediti izraz za fluks jezgra, intenzitet magnetne indukcije i jačine magnetnog polja u feromagnetu i zazoru.

Magnetno kolo sa vazdušnim zazorom (procepom)



$S_0 \approx S$



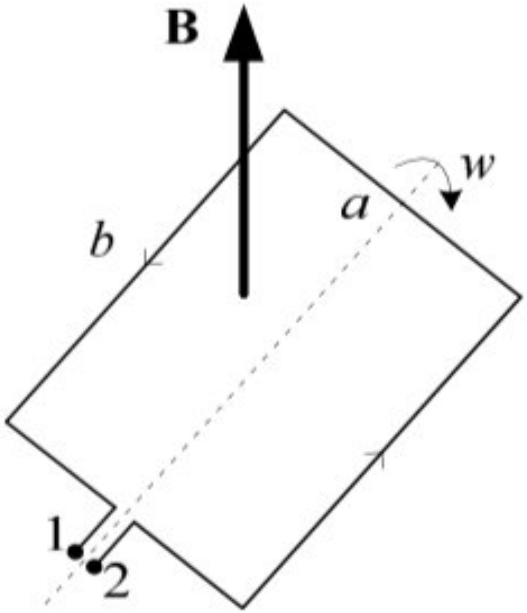
$$R_{m0} = \frac{l_0}{\mu_0 S_0} \approx \frac{l_0}{\mu_0 S}, \quad R_{m1} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S}$$

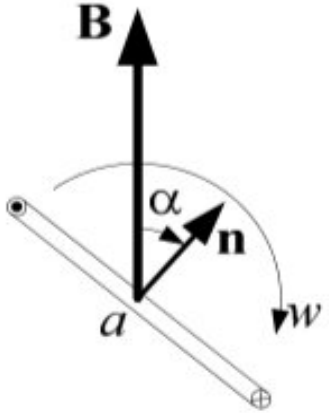
$$\Phi = \frac{NI}{R_{m0} + R_{m1}}$$

$$B_0 \approx B = \frac{\phi}{S} \qquad H_0 = \frac{B}{\mu_0}, \quad H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$$

PRIMERI

- **Primer 3**. Dinamička indukcija – obrtni generator (alternator).
- Pravougaona kontura stranica ***a*** i ***b*** okreće se konstantnom ugaonom brzinom ***w*** oko svoje ose.
- Kontura se nalazi u homogenom konstantnom magnetnom polju indukcije ***B***, koja je normalna na osu obrtanja.
- Odrediti intezitet indukovane elektromotorne sile između priključaka 1 i 2 konture.





PRIMERI

- Fluks kroz konturu je

$$\phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cdot\cos(\alpha) = Bab\cdot\cos(\alpha),\ \alpha(t) = wt$$

$$\phi(t) = Bab\cdot\cos(wt)$$

$$e_{ind} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}(Bab\cdot\cos(wt)) = Babw\cdot\sin(wt)$$

$$e_{ind} = E_m\cdot\sin(wt)$$

- **Naizmenične struje** **(engl. *alternating current*)**.

